∾ DÉRIVÉ DES FONCTIONS QUOTIENT ∾
DEVOIR MAISON

Exercice 1.

Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.

Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1;20]$ par :

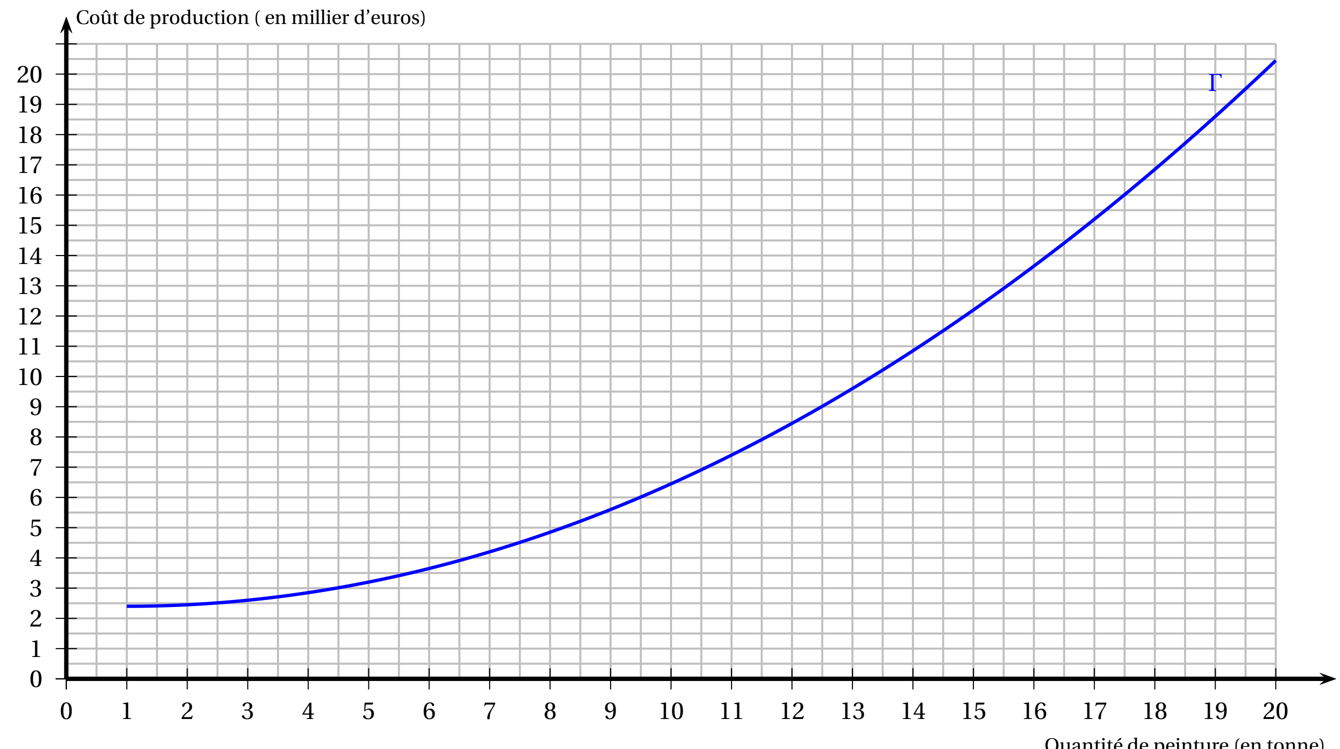
$$C(x) = 0,05x^2 - 0,1x + 2,45.$$

L'entreprise fixe le prix de vente d'une tonne de peinture à 670 €.

PARTIE A.

On a représenté, ci-dessous, la courbe Γ représentant le coût de production dans un repère orthogonal du plan.

1. Donner le coût correspondant à une fabrication quotidienne de 9,5 tonnes de peinture.
2. Déterminer la production quotidienne correspondant à un coût de fabrication de 16000€.
3. (a) Construire, dans le repère suivant, la courbe représentant la recette correspondant à la vente de x tonnes de peinture, pour $x \in [1 ; 20]$.



   (b) Donner par lecture graphique, l'ensemble des valeurs de la production quotidienne pour lesquelles l'entreprise réalise un bénéfice.

PARTIE B.

Pour une production de x tonnes de peinture, on appelle coût unitaire, le coût $f(x)$, auquel revient alors la production d'une tonne de peinture.

1. Sachant que, pour tout $x \in [1 ; 20]$, $f(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, vérifier que $f(x) = 0,05x - 0,1 + \dfrac{2,45}{x}$
2. On note f' la dérivée de f. Calculer $f'(x)$ puis démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1;20]$, $f'(x) = \dfrac{0,05(x^2-49)}{x^2}$
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour $x \in [1 ; 20]$ et dresser le tableau de variation de f.
4. (a) Préciser la quantité de peinture que doit produire l'entreprise pour que le coût unitaire soit minimal.
   (b) Quel est ce coût unitaire minimal ?
   (c) Quel est alors le bénéfice réalisé par l'entreprise ?
5. La valeur trouvée à la question **4. c.** est-elle le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser ? Justifier la réponse.