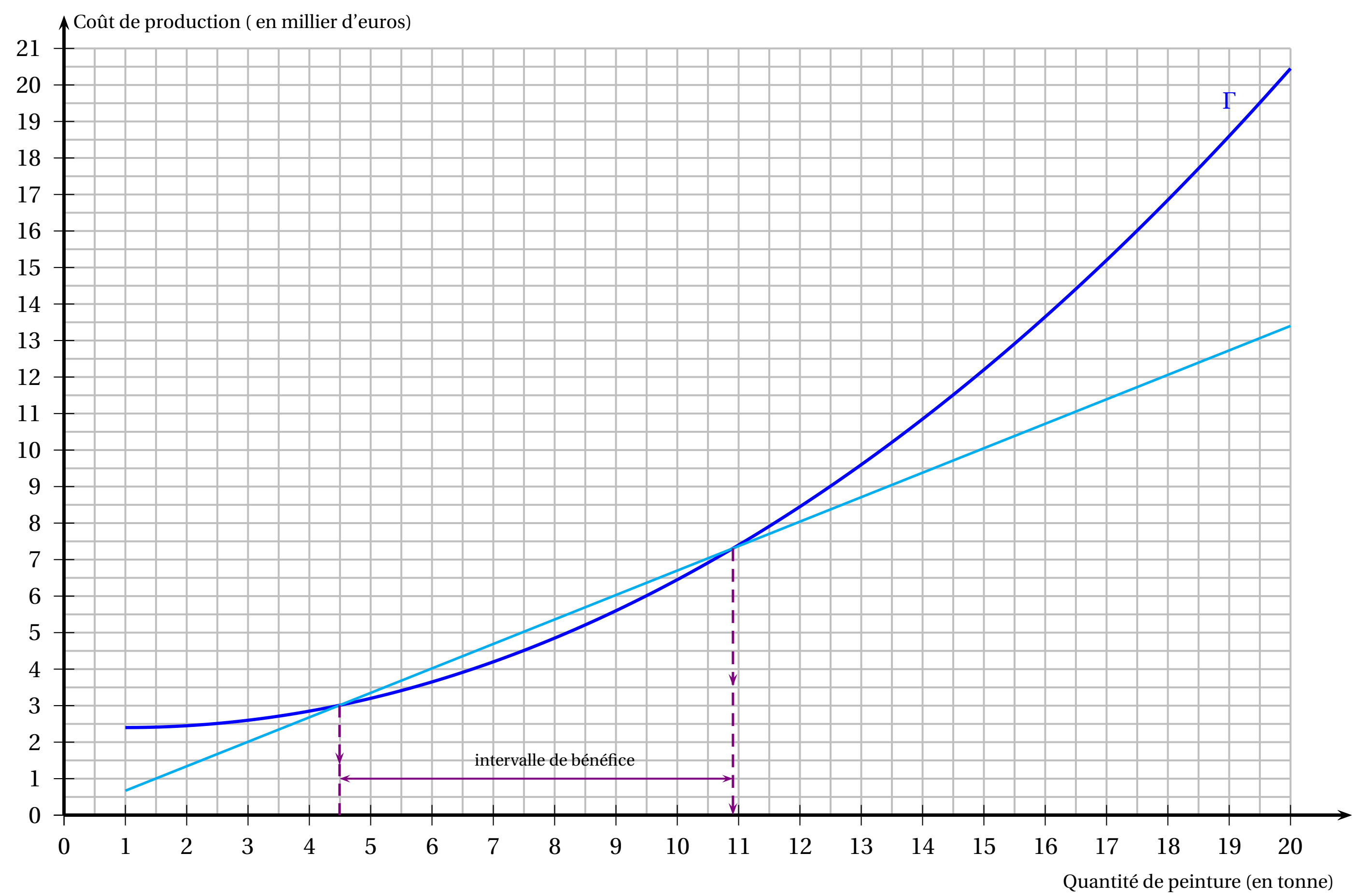
Exercice 1.

Une entreprise peut produire quotidiennement entre 1 et 20 tonnes de peinture.
Le coût de production, en millier d'euros, de x tonnes de peinture est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;\,20]$ par : $\mathrm{C}(x) = 0,05x^2 - 0,1x + 2,45$.
L'entreprise fixe le prix de vente d'une tonne de peinture à 670 €.

Partie A

On a représenté, ci-dessous, la courbe Γ représentant le coût de production dans un repère orthogonal du plan.

1. Le coût correspondant à une fabrication quotidienne de 9,5 tonnes de peinture est C(9.5) soit $0,05 \times 9.5^2 - 0,1 \times 9.5 + 2,45 = 6.0125$.
   Le coût de fabrication de 9.5 tonnes de peinture s'élève à 6012.5 €.
2. Déterminons la production quotidienne correspondant à un coût de fabrication de 16000€. Pour ce faire, résolvons $0,05x^2 - 0,1x + 2,45 = 16$ ou $x^2 - 2x - 271 = 0$. Nous avons un trinôme du second degré, calculons Δ.
   $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-271) = 4 + 1084 = 1088$. $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   $x_1 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{1088}}{2} = \dfrac{2 - 2\sqrt{272}}{2} = 1 - \sqrt{272} \approx -15.49$; $x_2 = 1 + \sqrt{272} \approx 17.49$.
   Pour un coût de 16 000 euros, l'entreprise pourra fabriquer environ [t]17.49 de peinture.
3. (a) Construisons, dans le repère suivant, la courbe représentant la recette correspondant à la vente de x tonnes de peinture, pour $x \in [1\,;\,20]$ c'est-à dire la droite d'équation $y = 0,67x$ restreinte à l'intervalle $[1\,;\,20]$.



   (b) L'entreprise réalise un bénéfice lorsque la courbe représentant les recettes est « au-dessus » de la courbe représentant les coûts. Par lecture graphique et avec la précision permise par celui-ci, l'ensemble des valeurs de la production quotidienne appartient à l'intervalle $[4.5\,;\,10.9]$.

Partie B

Pour une production de x tonnes de peinture, on appelle coût unitaire, le coût $f(x)$, auquel revient alors la production d'une tonne de peinture.

1. Sachant que, pour tout $x \in [1\,;\,20]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{C}(x)}{x}$, vérifions que $f(x) = 0,05x - 0,1 + \dfrac{2,45}{x}$.
   $f(x) = \dfrac{0,05x^2 - 0,1x + 2,45}{x} = \dfrac{0.05x^2}{x} - \dfrac{0.1x}{x} + \dfrac{2.45}{x} = 0.05x - 0.1 + \dfrac{2.45}{x}$. La relation est vraie.
2. On note f' la dérivée de f.
   $f'(x) = 0.05(1) + 2.45 \times \dfrac{-1}{x^2} = 0.05 - \dfrac{2.45}{x^2} = \dfrac{0.05x^2 - 2.45}{x^2} = \dfrac{0.05(x^2 - 49)}{x^2}$
   Nous avons montré que, pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;20]$, $f'(x) = \dfrac{0,05(x^2-49)}{x^2}$.
3. Déterminons le signe de $f'(x)$ pour $x \in [1\,;\,20]$
   Nous pouvons écrire aussi $f'(x) = \dfrac{0.05(x+7)(x-7)}{x^2}$. Or sur $[1\,;20]$ $\dfrac{0.05(x+7)}{x^2} > 0$, par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 7$.
   Sur $\mathbb{R}$, $x - 7 > 0 \iff x > 7$. Par conséquent si $x \in [1\,;\,7[$, $f'(x) < 0$ et si $x \in]7\,;\,20]$, $f'(x) > 0$
   Étudions le sens de variation de f.
   Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.
   Sur $[1\,;\,7[$, $f'(x) < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur cet intervalle.
   Si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I.
   Sur $]7\,;\,20]$, $f'(x) > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur cet intervalle.
   Construisons le tableau de variation de f sur $[1\,;20]$.

x	0		7		20
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	2.4	↘	0.6	↗	1.0225

.

4. (a) La fonction f admet un minimum en $x = 7$ par conséquent la quantité de peinture que doit produire l'entreprise pour que le coût unitaire soit minimal est de 7 tonnes.
   (b) Ce coût unitaire minimal s'élève en millier d'euros à 0.6 par conséquent le coût unitaire minimal est de 600 €.
   (c) Le bénéfice réalisé par l'entreprise est de 670-600 soit 70 €, pour chaque tonne fabriquée dans ces conditions. Le bénéfice réalisé lors de la fabrication des sept tonnes est 7×70 soit 490 €.
5. La valeur trouvée à la question **4. c.** n'est pas le bénéfice maximal que l'entreprise peut réaliser.
   Le bénéfice est $0.67 - (0,05x^2 - 0,1x + 2,45)$ soit $-0.05x^2 + 0.77x - 2.45$.
   En étudiant la fonction B définie sur $[1\,;20]$ par $x \mapsto -0.05x^2 + 0.77x - 2.45$, nous pouvons montrer que le bénéfice maximal est obtenu pour une fabrication de [t]7.7. Le bénéfice maximal en millier d'euros est B(7.7) soit 514.5 €.