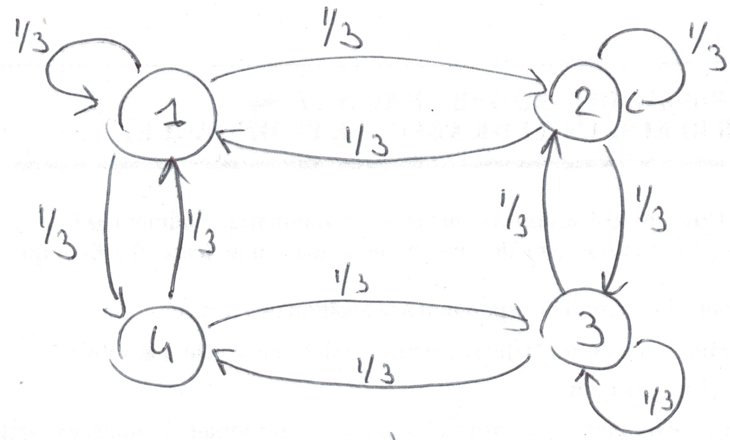
Eléments de correction du DM 5

1) 

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2a) $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$X_n = X_{n-1} \times \Pi = X_1 \times \Pi^{n-1}$

b) Niquedouille a "bougé" à 10 min et à 20 min, donc 2 fois

On cherche donc $X_3 = X_1 \times \Pi^2 = \ldots = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

$\frac{1}{3} > \frac{2}{9}$ donc Robin a intérêt à être au poste 4 (opposé au plus probable et c'est faisable).

3) a) $PQ = \ldots = I_4$.

Donc P est l'inverse à gauche de Q : c'est l'inverse de Q. (et réciproquement).

b) $Q\Pi P = \ldots = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

c) $D = Q\Pi P \iff Q^{-1} D P^{-1} = Q^{-1}(Q\Pi P)P^{-1}$

$\iff PDQ = (Q^{-1}Q)\Pi(PP^{-1})$ d'après 3a)

$\iff PDQ = \Pi$

d) Par récurrence mq $\forall n \geq 1$, $\Pi^n = PD^nQ$.

Initialisation : pour $n=1$ on sait déjà que $\Pi = PDQ$. (3c))

Hérédité : mq si "$\Pi^n = PD^nQ$" alors "$\Pi^{n+1} = PD^{n+1}Q$"

Or $\Pi^{n+1} = \Pi^n \times \Pi = PD^n\underbrace{Q \times P}_{I}DQ$ d'après l'hyp. de réc.

$= PD^n \times DQ$

$= PD^{n+1}Q$ cqfd

Ccl : ...

e) $D^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$D^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(-3)^n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

f) $X_n = X_1 \times M^{n-1}$

$= X_1 \times P D^{n-1} Q$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3^{n-1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^{n-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(-3)^{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times Q$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3^{n-1}} & 0 & \frac{-1}{(-3)^{n-1}} & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{-1}{(-3)^{n-1}} + 1 & \frac{2}{3^{n-1}} + \frac{1}{(-3)^{n-1}} + 1 & \frac{-1}{(-3)^{n-1}} + 1 & \frac{-2}{3^{n-1}} + \frac{1}{(-3)^{n-1}} + 1 \end{pmatrix}$

g) $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{(-3)^{n-1}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{-3}\right)^{n-1}$

et $-1 < -\frac{1}{3} < 1$.

4) Cela n'a aucune importance et au final, comme la proba limite que Niquedouille soit dans n'importe quel poste est la même, il peut aller n'importe où.