Exercices
Nombres premiers entre eux

Exercice 1 : **Inspiré de Pondichéry 2017**

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?
2. Soit n un entier naturel.
   Conjecturer la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$. Aucune justification n'est demandée.
3. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	11	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

   Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».
   Qu'en penser ?

Partie B : Étude arithmétique

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $d_n = \text{PGCD}(u_n, v_n)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n divise $(-1)^{n+1}$.
3. Démontrer alors la conjecture émise à la question 2 de la partie A.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que la matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.

   (b) On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$\begin{cases} u_n & = & \dfrac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n & = & \dfrac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$$

2. (a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}$.

   (b) En déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Exercice 2 : **Inspiré de Nouvelle Calédonie novembre 2018**

Les parties A *et* B *peuvent être traitées de façon indépendante.*

On appelle suite de Fibonacci la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On admet que, pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel.

Partie A

1. (a) Calculer les termes de la suite de Fibonacci jusqu'à u_{10}.
   (b) Que peut-on conjecturer sur le PGCD de u_n et u_{n+1} pour tout entier naturel n ?
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1}$ pour tout entier naturel n non nul.
   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $v_{n+1} = -v_n$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n^2 - u_{n+1} \times u_{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $d_n = \text{PGCD}(u_n, u_{n+1})$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d_n divise $(-1)^{n-1}$.
   (b) Démontrer alors la conjecture émise à la question 1.*b*.

Partie B

On considère la matrice $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer F^2 et F^3. On pourra utiliser la calculatrice.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$$

3. (a) Soit n un entier naturel non nul. En remarquant que $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$, démontrer que

$$u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n.$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2.$$

4. On donne $u_{12} = 144$.
   Démontrer en utilisant la question **3.** qu'il existe un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont toutes des nombres entiers, l'une étant égale à 12.
   Donner la longueur des deux autres côtés.