∽ EXERCICES ∾
MATRICES INVERSIBLES ET APPLICATIONS

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2,5 & 1,5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que B est la matrice inverse de A.

Exercice 2 : Soit la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A est une matrice inversible.
2. Déterminer la matrice inverse de A.
3. Vérifier votre résultat à l'aide de la calculatrice.

Exercice 3 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 6,25 & -9 \\ 4,5 & -6,5 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que la matrice A est égale au produit des matrices $P \times D \times P^{-1}$ où D désigne la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ et où P désigne la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
2. En déduire les coefficients de la matrice A^n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 4 : On considère dans l'espace muni d'un repère les plan d'équations

$$2x - y + z - 7 = 0 \quad ; \quad x + 2y - z + 7 = 0 \quad ; \quad 2x + y - 6 = 0$$

1. Exprimer qu'un point $M(x; y; z)$ appartient aux trois plans par une égalité matricielle AX = B où X est la matrice colonne de coordonnées de M.
2. Grâce à votre calculatrice, déterminer A^{-1} si elle existe.
3. En déduire l'intersection des trois plans.

Exercice 5 : Le chiffrement de Hill

Le principe : On choisit quatre entiers a, b, c et d constituant la **clé** du chiffrement. Les lettres de l'alphabet sont codées de 0 à 25 grâce au tableau suivant : A chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier m compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

A un bloc de deux lettres correspondent un couple $(x; y)$ d'entiers compris entre 0 et 25. On calcule les codes du message chiffré en associant au couple $(x; y)$ le couple $(x'; y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' \equiv ax + by \quad (26) \\ y' \equiv cx + dy \quad (26) \end{cases}$$

C. Aupérin
charlotte.auperin@ac-montpellier.fr

On souhaite chiffrer le mot DREAM.
On partage le mot en blocs de 2 lettres : DR- EA - MA (le dernier bloc est complété au hasard).
Choisissons $a = 5$, $b = 7$, $c = 2$ et $d = 3$, le système de chiffrement est donc :

$$\begin{cases} x' \equiv 7x + 3y \quad (26) \\ y' \equiv 5x + 8y \quad (26) \end{cases}$$

1. Chiffrer le mot DREAM.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que la matrice A est inversible puis déterminer B telle que $A^{-1} = \frac{1}{41}B$.
   (b) Montrer qu'il existe un unique entier m compris entre 0 et 25 tel que $41m \equiv 1[26]$.
   Déterminer m.
   (c) Montrer que la matrice mB est une matrice vérifiant :

   $$mB \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} [26]$$

   (*Cette congruence sur les matrices colonnes signifie la congruence des coefficients de chaque ligne.)*
   (d) Déterminer alors quatre entiers A, B, C et D compris entre 0 et 25 tels que :

   $$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} [26]$$

   (e) En déduire un algorithme de décodage de ce chiffrement de Hill et déchiffrer le message :

   « XZEQGCXWCO »

3. Dans le chiffrement précédent, quelle condition particulière sur 41 et 26 permet de répondre à la question 2.(b)
4. On souhaite adopter le chiffrement de Hill donné par le procédé :

   $$\begin{cases} x' \equiv 6x + 2y \quad (26) \\ y' \equiv 7x + 3y \quad (26) \end{cases}$$

   Soit A la matrice associé à ce chiffrement. Quels sont les diviseurs communs de $\det A$ et de 26 ?
5. Comparer les produits $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+13 \\ y+13 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Le procédé de codage est-il satisfaisant ?
   Justifier.