# CORRECTION EXERCICES 6 BIS<br>BEZOUT

**Exercice 1** :

Exo 1 :

1) $7x+13y=1 \Longrightarrow 13y \equiv 1 \quad [7]$.

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $13y$ | 0 | 13 | 26 | 39 | 52 | 65 | 78 |
| $13y$ [7] | 0 | 6 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Donc si $y=6$ on a bien $13y \equiv 1 \quad [7]$.

Dans ce cas, on choisit $x$ tq $7x = 1-13y$

$\iff x = \dfrac{-77}{7} = -11$.

Une solution de (E) est donc $(-11\,;\,6) = (x_0\,;\,y_0)$

2) $(x,y)$ est une solution de $(E) \iff 7x+13y = 7\times(-11)+13\times 6$

$\iff 7(x+11) = 13(6-y)$

$\iff 7(x-x_0) = 13(y_0-y)$

3) Ainsi $7 \mid 13(y_0-y)$.

Or $PGCD(7\,;\,13)=1$ donc $7 \mid (y_0-y)$

Ainsi $\exists k \in \mathbb{Z}$, $y_0 - y = 7k \iff 6-y = 7k \iff \boxed{y = 6-7k}$

Et donc $7(x+11) = 13\times 7k$

$\iff x+11 = 13k$

$\iff \boxed{x = 13k-11}$.

De plus $7(13k-11)+13\times(6-7k) = -77+78 = 1$.

Donc les solutions sont les couples $(13k-11\,;\,6-7k)$ avec $k\in$

**Exercice 2** :

1. Cherchons le premier train de la ligne A qui part après 7h : Il y en a un à 6h52, un à 6h59 et un à 7h06. Donc le premier train de la ligne A part 6 min après 7h, soit 7min - 1 min après 7h.
   Ainsi le $x^{ème}$ train de la ligne A est parti $7x-1$ minutes après 7h00. Il passera donc à la station Bézout $7x-1+8$ minutes après 7h00.

   Pour la ligne B, le premier train est celui de 7h06, soit 6 min après 7h, donc 11 min - 5 min après 7h.
   Ainsi le $y^{ème}$ train de la ligne B est à la station Bézout $11y-5$ minutes après 7h00.

   On cherche donc $x$ et $y$ tels que $7x-1+8 = 11y-5 \iff 7x-11y = -12$

C. Aupérin
charlotte.auperin@ac-montpellier.fr

2) $7x - 11y = -12 \implies -11y \equiv -12 \quad [7]$

$\iff -4y \equiv -5 \quad [7]$

$\iff 4y \equiv 5 \quad [7]$

| $y$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $4y$ | 0 | 4 | 8 | 12 |
| $4y$ [7] | 0 | 4 | 1 | 5 |

Donc si $y = 3$ on a bien $4y \equiv 5 \quad [7]$.

et il suffit de choisir $x$ tq $7x = -12 + 11y$

$= -12 + 11 \times 3$

$= -12 + 33$

$7x = 21$

$x = 3$.

Une sol. particulière de $(E_1)$ est $(3 ; 3)$.

3). Ainsi $7x - 11y = 7 \times 3 - 11 \times 3$

$\iff 7(x-3) = 11(y-3)$

Donc $7 \mid 11(y-3)$. Comme $PGCD(7;11) = 1$

d'après Gauss $7 \mid (y-3)$.

Ainsi $\boxed{y - 3 = 7k}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'où $7(x-3) = 11 \times 7k$

$\iff x - 3 = 11k$

$\iff \boxed{x = +11k + 3}$

Les solutions sont donc des couples de la forme $(+11k+3 ; 7k+3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

• Or $7(+11k+3) - 11(7k+3) = 7 \times 3 - 11 \times 3 = -12$. $\underline{\forall k \in \mathbb{Z}}$

Les sol. de $(E_1)$ sont finalement tous les couples de la forme $(11k+3 ; 7k+3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4) On veut que le 1er train soit pris entre 6h et 9h
ie 7h − 60 min et 7h + 120 min.

Donc on cherche $x$ tq $-60 \leqslant 7x - 1 \leqslant 120$ (cf 1))

$\iff -60 \leqslant 7(11k-3)-1 \leqslant 120$

...

$\iff$

$\iff -1{,}04... \leqslant k \leqslant 1{,}30...$

D'où $k \in \{-1 ; 0 ; 1\}$ et $x = 11k+3 \in \{-8 ; 3 ; 14\}$

Il s'agit donc des trains partis $7\times -8 - 1 = -57$ min après 7h
$7\times 3 - 1 = 20$ min après 7h
$7\times 14 - 1 = 97$ min après 7h

ie des trains partis à 6h03, 7h20 et 8h37.

<u>Vérification (facultatif)</u>

- on peut déjà rapidement contrôler qu'il y a bien des trains de la ligne A qui partent à ces heures là.
- Ils arrivent alors à Bezout à 6h11, 7h28 et 8h45
- on peut alors vérifier que des trains de la ligne B partent bien aussi à ces heures-ci.
- Pour être sûr d'avoir toutes les sol, il faudrait lister ts les horaires, mais a priori, si on a juste avant, on a de bonnes chances de ne pas avoir oublié de solutions.

**Exercice 3** :

## Partie A

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$, on considère les points A(1 ; 5 ; −2), B(7 ; −1 ; 3) et C(−2 ; 7 ; −2) et on note P le plan (ABC).

On cherche une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ sous la forme : $ax + by + cz = 73$, où $a$, $b$ et $c$ sont des nombres réels.

On note X et Y les matrices colonnes : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

   Si le plan (ABC) a pour équation $ax + by + cz = 73$, alors les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation du plan, c'est-à-dire : $\begin{cases} ax_A + by_A + cz_A &= 73 \\ ax_B + by_B + cz_B &= 73 \\ ax_C + by_C + cz_C &= 73 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 5b - 2c &= 73 \\ 7a - b + 3c &= 73 \\ -2a + 7b - 2c &= 73 \end{cases}$

   Or $MX = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 7 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 5b - 2c \\ 7a - b + 3c \\ -2a + 7b - 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 73 \\ 73 \end{pmatrix} = 73 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 73Y$. D'où l'égalité voulue.

2. Soit la matrice : $N = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}$.

   À l'aide d'une calculatrice, on a calculé les produits M × N et N × M, et on a obtenu les copies d'écran suivantes :

Pour M × N :

| Ans | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 73 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 73 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 73 |

Pour N × M :

| Ans | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 73 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 73 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 73 |

Si on appelle I la matrice unité d'ordre 3, la calculatrice montre que $\mathrm{MN} = \mathrm{NM} = 73\mathrm{I}$ donc que $\mathrm{M}\left(\frac{1}{73}\mathrm{N}\right) = \left(\frac{1}{73}\mathrm{N}\right)\mathrm{M} = \mathrm{I}$.

Cela prouve que la matrice M est inversible et que son inverse est $\mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{73}\mathrm{N}$.

3. $\mathrm{MX} = 73\mathrm{Y} \iff \mathrm{M}^{-1}\mathrm{MX} = \mathrm{M}^{-1} \times 73\mathrm{Y} \iff \mathrm{X} = \frac{1}{73}\mathrm{N} \times 73\mathrm{Y} \iff \mathrm{X} = \mathrm{NY}$

4. $\mathrm{X} = \mathrm{NY} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 4 & -13 \\ -8 & 6 & 17 \\ -47 & 17 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19+4-13 \\ -8+6+17 \\ -47+17+36 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$

   Le plan $\mathscr{P}$ a donc pour équation $10x + 15y + 6z = 73$.

### Partie B

L'objectif de cette partie est l'étude des points à coordonnées entières du plan P ayant pour équation cartésienne : $10x + 15y + 6z = 73$.

1. Soit $\mathrm{M}(x\,;\,y\,;\,z)$ un point appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$. On suppose que les coordonnées $x$, $y$ et $z$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.

   (a) Si $z = 3$ et $10x + 15y + 6z = 73$, alors

   $$10x + 15y + 6 \times 3 = 73 \iff 10x + 15y = 55 \iff 2x + 3y = 11$$

   Donc $(x\,;\,y)$ est solution de l'équation $2x + 3y = 11$.

   (b) $2 \times 7 + 3 \times (-1) = 14 - 3 = 11$ donc le couple $(7\,;\,-1)$ est solution de (E).

   - Si le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors $2x + 3y = 11$.
     De plus, on sait que $2 \times 7 + 3 \times (-1) = 14 - 3 = 11$.
     En retranchant membre à membre ces deux égalités, on obtient : $2(x-7) + 3(y+1) = 0$ ou encore

     $$2(x-7) = -3(y+1)$$

     On peut donc dire que le nombre 3 divise le produit $2(x-7)$.
     Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, on peut dire, d'après le théorème de Gauss, que 3 divise $x - 7$.
     On peut ainsi écrire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 7 = 3k$ ou encore $x = 7 + 3k$.
     De plus, comme $2(x-7) = -3(y+1)$ et $x - 7 = 3k$, on a $2 \times 3k = -3(y+1)$.
     Ce qui entraîne $2k = -y - 1$ ou encore $y = -1 - 2k$.
   - **Réciproquement**, si $x = 7 + 3k$ et $y = -1 - 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors

     $$2x + 3y = 2(7+3k) + 3(-1-2k) = 14 + 6k - 3 - 6k = 11$$

     donc le couple $(x\,;\,y)$ est solution de (E) pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

   L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des couples $(7+3k\,;\,-1-2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

(c) D'après les questions précédentes, les points appartenant au plan $\mathscr{P}$ et au plan d'équation $z = 3$ et dont les coordonnées appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels sont à chercher parmi les couples $(7+3k\ ;\ -1-2k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On cherche donc $k$ de $\mathbb{Z}$ tel que $7+3k \in \mathbb{N}$ et $-1-2k \in \mathbb{N}$.

Il faut donc que $7+3k \geq 0$ et que $-1-2k \geq 0$, c'est-à-dire $k \geq -\dfrac{7}{3}$ et $k \leq -\dfrac{1}{2}$. Les deux seules valeurs possibles sont donc

- $k = -2$ ce qui donne $x = 7+3(-2) = 1$ et $y = -1-2(-2) = 3$ donc le point correspondant est $(1\ ;\ 3\ ;\ 3)$ ;
- $k = -1$ ce qui donne $x = 7+3(-1) = 4$ et $y = -1-2(-1) = 1$ donc le point correspondant est $(4\ ;\ 1\ ;\ 3)$.

2. Dans cette question, on se propose de déterminer tous les points $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ du plan $\mathscr{P}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Soient $x$, $y$ et $z$ des entiers naturels tels que $10x+15y+6z = 73$.

(a) Montrer que $y$ est impair. $10x+15y+6z = 73 \iff 15y = 73-10x-6z \iff 15y = 1+2(36-5x-3z)$

Comme $36-5x-3z) \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $15y$ est un nombre impair.

Or si $y = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $15y = 2 \times 15k$ et donc $15y$ est pair.

Il faut donc que $y$ soit impair.

(b) Montrer que : $x \equiv 1 \quad [3]$. On admet que : $z \equiv 3 \quad [5]$. $10x+15y+6z = 73 \iff 10x = 73-15y-6z$

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad 10 = 3\times 3+1 \equiv 1\ [3] \implies 10x \equiv x\ [3] \\ \left.\begin{array}{lll} 73 = 3\times 24+1 & \implies & 73 \equiv 1\ [3] \\ 15 = 5\times 3 \equiv 0\ [3] & \implies & 15y \equiv 0\ [3] \\ 6 = 2\times 3 \equiv 0\ [3] & \implies & 6z \equiv 0\ [0] \end{array}\right\} \implies 73-15y-6z \equiv 1\ [3] \end{array}\right\} \implies x \equiv 1\ [3]$$

(c) On pose alors : $x = 1+3p$, $y = 1+2q$ et $z = 3+5r$, où $p$, $q$ et $r$ sont des entiers naturels.

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathscr{P} &\iff 10x+15y+6y = 73 \iff 10(1+3p)+15(1+2q)+6(3+5r) = 73 \\ &\iff 10+30p+15+30q+18+30r = 73 \iff 30p+30q+30r = 30 \\ &\iff p+q+r = 1. \end{aligned}$$

(d) On cherche les triplets $(1+3p\ ;\ 1+2q\ ;\ 3+5r)$ où $p$, $q$ et $r$ sont des entiers naturels tels que $p+q+r = 1$. Il existe trois solutions :

- $p = 1$, $q = 0$ et $r = 0$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (4\ ;\ 1\ ;\ 3)$ ;
- $p = 0$, $q = 1$ et $r = 0$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (1\ ;\ 3\ ;\ 3)$ ;
- $p = 0$, $q = 0$ et $r = 1$, donc $(x\ ;\ y\ ;\ z) = (1\ ;\ 1\ ;\ 8)$.

Ce sont les coordonnées des trois points de $\mathscr{P}$ à coordonnées dans $\mathbb{N}$.