***Preuve***

$\Longleftarrow$ : Dans l'activité précédente, on a déjà vu que si $det A \neq 0$, alors la matrice $B = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ existe et $AB = BA = I$. Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

$\Longrightarrow$ : Raisonnons par l'absurde et supposons que A est inversible et $\det A = 0$ .
Observons alors le système (S) suivant, d'inconnues $x$ et $y$ :

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=1 \end{cases} \Longleftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il admet donc un unique couple solution.
Mais regardons ce système sous l'angle géométrique et notons $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les droites d'équation $ax+by=1$ et $cx+dy=1$
Puisque (S) admet une unique solution cela signifie que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes.
Or, le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$ est $-\dfrac{a}{b}$ tandis que le coefficient directeur de $\mathscr{D}'$ est $-\dfrac{c}{d}$.
Comme les droites sont sécantes, on sait que $-\dfrac{a}{b} \neq -\dfrac{c}{d}$
Or $\det A = 0 \Longleftrightarrow ad-bc=0 \Longleftrightarrow ad=bc \Longleftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longleftrightarrow -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{c}{d}$ ce qui est absurde !
Donc $\det A \neq 0$.
Et dans ce cas, $\dfrac{1}{ad-bc} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ existe et convient pour $A^{-1}$.