Exo 1 :

1) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1\times 2 + (-1)\times 3 + 1\times(-1) = -2$ } produit scalaire cf chap 6.

$\vec{v}\cdot\vec{w} = 2\times 1 + 3\times 2 + (-1)\times 3 = 5$

2) $\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)\times(-1) - 1\times 3\\ 2\times 1 - (-1)\times 1\\ 1\times 3 - (-1)\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$

$\vec{v}\wedge\vec{w} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\times 3 - (-1)\times 2\\ 1\times(-1) - 3\times 2\\ 2\times 2 - 3\times 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\-7\\1\end{pmatrix}$

$\vec{w}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}-11\\7\\-1\end{pmatrix}$ (normal car $\vec{w}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{w}$.)

$\vec{v}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (normal car $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{v}$!)

Exo 2 :

1) a) $\vec{OA}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{OB}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ donc $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 3\times 2 + 1\times 3 + 0\times 0 = 9$.

b) On sait aussi que $\vec{OA}\cdot\vec{OB} = OA\times OB\times\cos(\widehat{AOB})$

Or $OA = \sqrt{3^2+1^2+0} = \sqrt{10}$ et $OB = \sqrt{2^2+3^2+0^2} = \sqrt{13}$

donc on a $9 = \sqrt{10}\times\sqrt{13}\times\cos(\widehat{AOB})$

$\Leftrightarrow \dfrac{9}{\sqrt{10}\times\sqrt{13}} = \cos(\widehat{AOB})$ d'où $\cos(\widehat{AOB}) \simeq 0{,}79$

et $\widehat{AOB} \simeq 37{,}9°$

2) $\vec{OA}\wedge\vec{OB} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times 0 - 0\times 3\\ 2\times 0 - 0\times 3\\ 3\times 3 - 1\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}$

3) $\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2}\|\vec{OA}\wedge\vec{OB}\| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+0^2+7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49} = 3{,}5$.

Exo 3 :

1) $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EG} \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-2 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires donc E, F et G ne sont pas alignés.

3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = 3\times(-2) + 3\times(-3) + 3\times(-4) = -6-9-12 = -27$

4) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} \neq 0$ donc $\widehat{FEG} \neq 90°$ et EFG n'est pas rectangle en E.

5) $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times(-4) - 3\times(-3) \\ -2\times 3 - (-4)\times 3 \\ 3\times(-3) - 3\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

6) $\text{Aire}(EFG) = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG} \| = \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{54}$

$\simeq 3,67$