∾ COURS ∾
CALCUL VECTORIEL : PRODUIT VECTORIEL

I) Encore produit de vecteurs

I.1. Définition

Visualiser la vidéo suivante, pendant 1min30 :

Définition du produit vectoriel

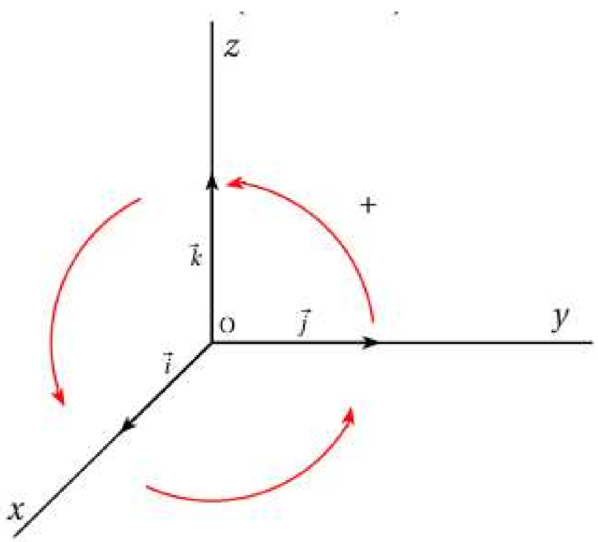
Dans tout ce qui suit, l'espace est muni d'un repère $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ de sens direct.

Définition 1.

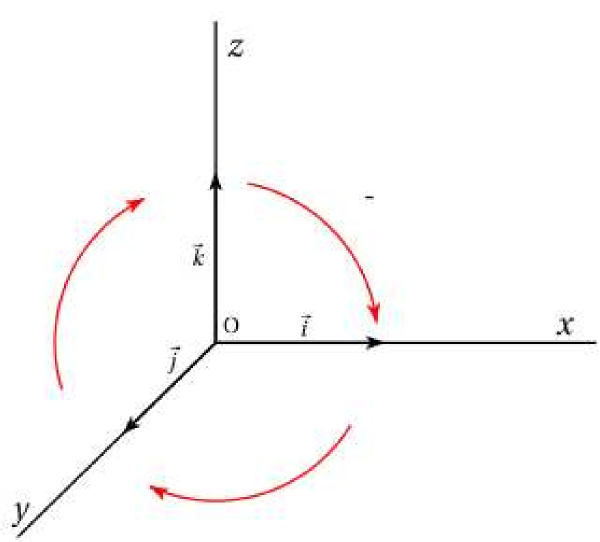
Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur $\vec{w}$ tel que :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{w} = \vec{0}$
- sinon :
  - sa direction est orthogonale à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$
  - son sens est tel que $(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{w})$ est de sens direct
  - sa norme est donnée par $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times |\sin(\theta)|$ où θ est l'angle $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$

On rappelle que l'espace peut être orienté dans le sens direct ou indirect :



Sens **direct**



Sens **indirect**

Exemples :

Si $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ est un repère orthonormé direct, alors $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$ ...

Attention : $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}$

C. Aupérin
charlotte.auperin@ac-montpellier.fr

Remarques :

- Un produit vectoriel est un **vecteur**, contrairement au produit scalaire qui est un **nombre**
- Le produit vectoriel n'a de sens que dans l'espace et n'existe pas dans le plan, puisqu'il donne un vecteur de manière à avoir une base de l'espace.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout nombre réel a :
  — $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$
  — $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$ pour tout vecteur $\vec{u}$ car le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
  — $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  A ne pas confondre avec $\vec{u}.\vec{v} = 0 \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
  — $\vec{u} \wedge (a\vec{v}) = a(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (a\vec{u}) \wedge \vec{v}$

I.2. Avec les coordonnées

La définition du produit vectoriel n'est pas aisée à manipuler, comme on a pu le voir dans les exemples. Par contre, son calcul avec les coordonnées est simple, et nous nous contenterons de cela pour le BTS.

Propriété 1.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ on a : $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ x'z - z'x \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

Utiliser la technique de la ligne cachée, visible ici

Exemple :

On considère les vecteurs $\vec{u}(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$, $\vec{v}(1\ ;\ -3\ ;\ -2)$ et $\vec{w}(0\ ;\ 4\ ;\ -1)$.
Calculer les produits $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{w}$

II) Applications

II.1. En géométrie

Le produit vectoriel intervient dans des calculs d'angles et d'aires. En particulier :

⇝ **l'aire d'un triangle** ABC **vaut** $\frac{1}{2}||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$

⇝ **l'aire d'un parallélogramme** ABCD **vaut** $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||$

Exemple :

Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ direct de l'espace, on considère les points $A(5;-1;0)$, $B(-2;3;1)$ et $C(4,-2,6)$.

1. **a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$.

   c. En déduire l'aire du triangle OAB

2. **a.** Faire un schéma de la situation et placer D tel que ABCD soit un parallélogramme et donner ses coordonnées.

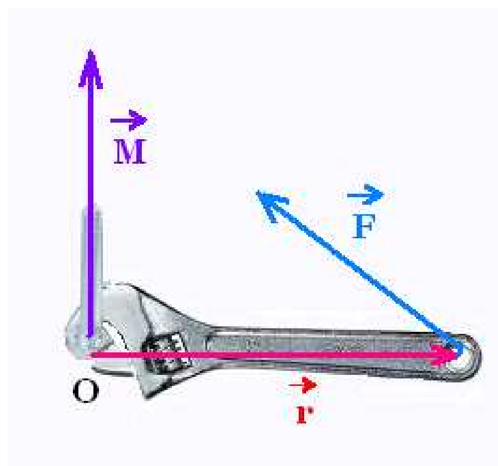
   b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

   c. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   d. En déduire l'aire du parallélogramme ABCD

II.2. En physique

Lorsqu'on veut serrer un écrou ou le débloquer avec une clé à molette, Il est nécessaire d'exercer une force sur la clé.



Le moment $\overrightarrow{M}$ d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point O, est un **vecteur** traduisant l'aptitude de la force $\vec{F}$ à faire tourner un système mécanique autour de O.

Il est clair que l'effet sur l'écrou est d'autant plus efficace que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

⇝ La force exercée sur la clé est grande,

⇝ Le bras de levier est grand,

⇝ L'orientation de la force est perpendiculaire au bras de levier.

Or ces trois notions rentrent en compte dans le calcul du produit vectoriel...
En fait, le moment de la force $\vec{F}$ exercée à une distance $||\vec{r}||$ du centre O est le produit vectoriel $\vec{r} \wedge \vec{F}$.

Remarques :

- Le vecteur $\vec{r}$ est appelé vecteur position. Son origine est le centre de rotation O.
- $||\vec{M}||$ s'exprime en N.m

Exemple :

Dans la situation précédente, on appelle A le point où s'applique $\vec{F}$ sur la clef et on munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ où (Ox) est l'axe de rotation de l'écrou et (Oy) celui de la clef.

La force $\vec{F}$ s'applique dans le plan (yOz) et a pour intensité $||\vec{F}|| = 150$ N. On donne de plus OA = 0.2 m

1. On suppose que la force $\vec{F}$ est perpendiculaire à l'axe de la clef, ie $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \vec{F}) = +90°$
   a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{F}$ et $\overrightarrow{OA}$
   b. En déduire les coordonnées du moment $\vec{M}$ de la force $\vec{F}$ sur l'écrou.
2. On suppose désormais que la force $\vec{F}$ n'est pas perpendiculaire à l'axe de la clef, $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \vec{F}) = \theta$ où $\theta \neq \pm 90°$
   a. Déterminer les coordonnées de $\vec{F}$
   b. En déduire les coordonnées du moment $\vec{M}$ de la force $\vec{F}$ sur l'écrou en fonction de θ. Quelle est sa direction ?
   c. Calculer la norme de $\vec{M}$ lorsque $\theta = 60°$, puis lorsque $\theta = 0°$
   d. Pour quel angle θ la norme de $\vec{M}$ est-elle la plus élevée ? Cela vous semble-t-il logique ?