☙ TRAVAIL MAISON CHAP 7 - F ❧
ECHANTILLONNAGE ET STATISTIQUES

Exercice 1. Dans une commune de plus de 50000 habitants, la proportion de femmes est 0,5. Le conseil municipal est composé de 43 personnes donc 17 femmes.

Peut-on affirmer qu'au conseil municipal, la parité des sexes n'est pas respectée ?

On teste l'hypothèse : le conseil municipal a respecté la parité des sexes autrement dit on teste l'hypothèse la proportion de femmes au conseil municipal est $p = 0.5$

Au conseil municipal ils sont $n = 43$ pour une fréquence de $f = \dfrac{17}{43} \simeq 0.395$.

On vérifie qu'on peut calculer les bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil 0.95 :

$n = 43 \geq 30$, $np = 43 \times 0.5 \geq 5$ et $n(1-p) = 43 \times 0.5 \geq 5$.

On calcule les bornes de l'intervalle de fluctuation :

$p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.5 - \dfrac{1}{\sqrt{43}} \simeq 0.34$ et $p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.5 + \dfrac{1}{\sqrt{43}} \simeq 0.66$

Si l'hypothèse est vraie les fréquences fluctuent, dans au moins 95% des cas dans l'intervalle :

$$[0.34; 0.66]$$

La fréquence, ici, vaut $0.395 \in [0.34; 0.66]$

On considère que l'hypothèse selon laquelle la parité des sexes est respectée dans ce conseil municipal est « valable »

Exercice 2. Dans une population de truites de rivière, le sex ration (proportion de mâles et de femelles) est de 0,5 pour chaque sexe. Certaines polutions par des produits pharmaceutiques modifient ce sex ration en augmentant la proportion de femelles. Sur un prélèvement de 100 truites de rivière, on a relevé une fréquence de femelles égale à 0,64.

Peut-on considérer que cela est dû au seul hasard ou bien doit-on suspecter une pollution ?

On teste l'hypothèse : dans cette rivière, le sex ratio est normal est vaut 0.5 autrement dit la pollution n'a pas impacté le sex ratio.

Dans notre échantillon nous avons prélevé $n = 100$ truites pour une fréquence de femelles $f = 0.645$.

On vérifie qu'on peut calculer les bornes de l'intervalle de fluctuation au seuil 0.95 :

$n = 100 \geq 30$, $np = 100 \times 0.5 = 50 \geq 5$ et $n(1-p) = 100 \times 0.5 = 50 \geq 5$.

On calcule les bornes de l'intervalle de fluctuation :

$p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.5 - \dfrac{1}{\sqrt{100}} \simeq 0.4$ et $p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.5 + \dfrac{1}{\sqrt{100}} \simeq 0.6$

Si l'hypothèse est vraie les fréquences fluctuent, dans au moins 95% des cas dans l'intervalle :

$$[0.4; 0.6]$$

La fréquence, ici, vaut $0.64 \notin [0.4; 0.6]$

On rejette l'hypothèse selon laquelle le sex ratio est normal au risque de se tromper dans 5% des cas.

Exercice 3. Lors d'un sondage effectué auprès de 900 personnes, 51% d'entre elles déclarent vouloir voter pour le candidat A. En supposant que les personnes sondées ont répondu sincèrement et qu'elles ne changeront pas d'avis le jour du vote, le candidat A peut-il raisonnablement penser qu'il sera élu au premier tour (c'est-à-dire avec plus de 50% des voix) ?

Pour cela on montrera que $0,48 \leq p \leq 0,54$.

Nous souhaitons proposer une **estimation** à partir des fréquences de la probabilité p, inconnue, des votes le jour J pour le candidat A.

On calcule les bornes de l'intervalle de confiance :

$f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.51 - \dfrac{1}{\sqrt{90}} \simeq 0.476$ et $f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0.51 + \dfrac{1}{\sqrt{900}} \simeq 0.544$

On peut estimer, avec une marge d'erreur de 5%, que la probabilité p, inconnue, des votes le jour J pour le candidat A est comprises entre 47.6% et 54.4%.

Il n'est pas si raisonnable au vue de ce seul sondage qu'il sera élu au premier tour.

Exercice 4. Supposons 21 personnes dans une pièce. Chacune prend l'argent de sa poche et le pose sur une table : 20 personnes posent 5 euros, et la dernière pose 10 000 euros.

1. Déterminer la moyenne et la médiane de cette série statistique. L'argent posé en moyenne par les 21 individus vaut :

$$m = \frac{20 \times 5 + 10000}{21} = 480 + \frac{20}{21}$$

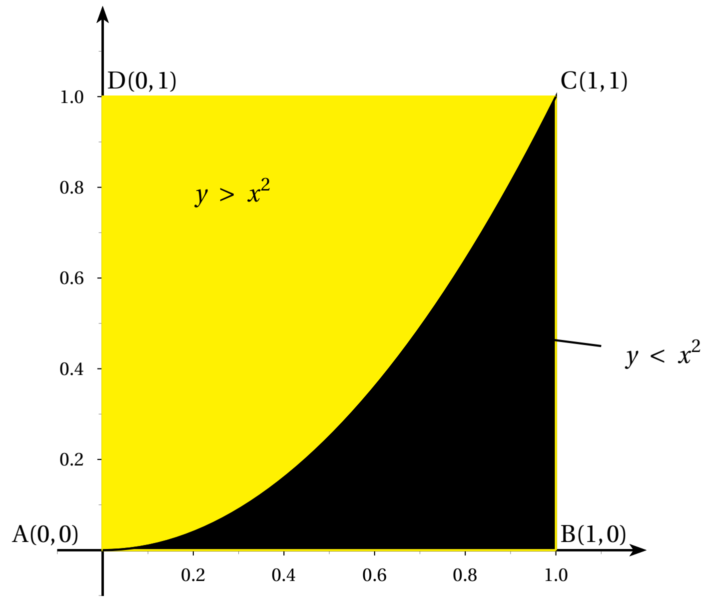
   La valeur médiane est trivialement 5.

2. Supposons désormais que la dernière ne soit pas rentrer dans la pièce, calculer de nouveau la moyenne et la médiane de la nouvelle série statistique.

Dans ce dernier cas de manière évidente moyenne et médiane valent toutes les deux 5.

Exercice 5. La loi des Grands Nombres

Alice, une élève studieuse, lance des fléchettes sur une cible carrée de côté 1. Elle atteint toujours la cible (ie le carré de côté 1) mais comme elle n'est pas très douée, elle pense que sa probabilité d'atteindre une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.
elle s'intéresse à la probabilité d'atteindre la zone sous la parabole $y = x^2$. Malheureusement, elle ne sait pas encore calculer cette aire (il l'apprendra peut-être un jour).
elle cherche donc à l'estimer par l'expérience, et pour cela, elle a rédigé l'algorithme ci-dessous.



1. Expliquer en quoi cet algorithme simule le lancer de fléchettes en détaillant ce que représentent X, Y, N, A et K.
   En choisissant une abscisse au hasard entre 0 et 1 (variable X) et une ordonnée au hasard entre 0 et 1 (variable Y) on modéliser bien le fait que la fléchette tombe au hasard dans le carré. La variable A compte le nombre de fléchette qui ont touché la zone jaune et la variable K le nombre de fléchette qui ont touché la zone noire. N désigne le nombre total de lancer.
2. Que représente l'affichage pour le problème d'Alice ?
   Après N simulations cela donne la fréquence de fléchettes tombé dans la zone jaune.
3. En utilisant une calculatrice ou un ordinateur, simuler 500 lancers et noter l'affichage en sortie.

```
main.py
from random import *
from math import *


def echantillon(n):
    A=0
    K=0 #une ligne indispensable qui manque dans l'algo de l'énoncé
    for i in range(n):
        x=random()
        y=random()
        if y>x*x:
            A=A+1
        else:
            K=K+1
    return A/n

n=500
print("Laire est",echantillon(n))
```

L'affichage en sortie :

```
Laire est 0.686


...Program finished with exit code 0
Press ENTER to exit console.
```

4. Relancer votre programme plusieurs fois en notant les affichages successifs.
   Est-ce toujours les mêmes ? Pourquoi ?

```
input
[0.64, 0.64, 0.644, 0.65, 0.65, 0.65, 0.656, 0.658, 0.664, 0.666, 0.668, 0.676, 0.676, 0.69, 0.7]


...Program finished with exit code 0
Press ENTER to exit console.
```

blueVoici les résultats d'une quinzaine de simulation.
Les résultats sont différents et les fréquences que nous observont fluctuent autour de l'aire de la partie jaune.

5. Simuler 1 000 (ou même plus) lancers et en déduire une valeur approchée de l'aire sous la parabole.
Ci-dessous on a affectué 15 simulations de 10000 lancers et on a obtenu les résultats suivants :

```
input
[0.6592, 0.6598, 0.6603, 0.6609, 0.6618, 0.6629, 0.663, 0.6631, 0.6639, 0.6664, 0.6677, 0.6683, 0.6683, 0.6694, 0.6743]


...Program finished with exit code 0
Press ENTER to exit console.
```

Les valeurs que l'on visualise fluctuent autour de $0,666$ autrement dit on peut conjecturer que l'aire de la partie jaune vaut $\dfrac{2}{3}$ et donc l'aire de la partie noire vaut $\dfrac{1}{3}$

Les commandes utiles, pour ce programme, en Python

⋆ Utiliser les nombres aléatoires, écrire en début de document : `from random import *`

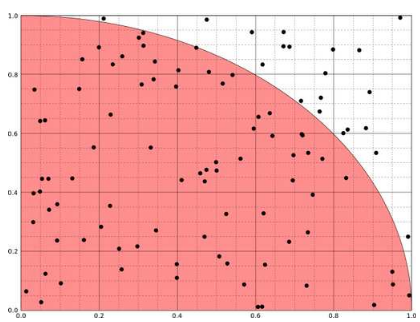
Instruction en langage naturel	En algorithme "de lycée"	En python
A prend la valeur V	A ⟵ V	`A=V`
choix d'un nombre aléatoire entre 0 et 1	Choisir un nombre aléatoire entre 0 et 1	`random()`

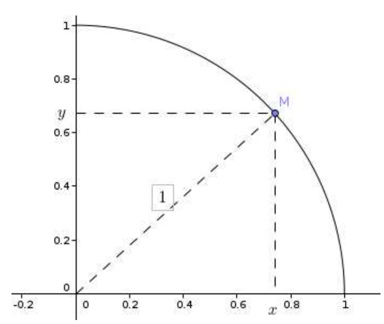
Test	Si *condition*
	Alors *instructions*
	Sinon *instructions*
	FinSi
		`if` *`condition`* `:`
		    `instructions`
		`else :`
		    `instructions`
		
		Une condition d'égalité s'écrit `A==B` (double égal)
		"A différent de B" s'écrit `A!=B`
		Le retour à gauche marque la fin de la conditionnelle

Itérations	pour i allant de 1 à n faire *instructions* Fin pour	`for i in range(n) :` *`instructions`* Le retour à gauche marque la fin de la boucle

Autour de la méthode de Monte Carlo

Un exemple pour estimer la valeur de π.





Voici la courbe d'une fonction f dans le carré comme dans l'exemple précédent.

On choisit un point au hasard (autrement dit on choisit une abscisse au hasard entre 0 et 1 et de même on choisit une ordonnée au hasard entre 0 et 1). On s'intéresse à la probabilité d'être à l'intérieur du quart de cercle.

Ce quart de cercle a pour aire $\dfrac{\pi r^2}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

Autrement dit la probabilité de choisir un point à l'intérieur du cercle vaut $\dfrac{\pi}{4}$ et donc 4 fois notre probabilité vaut π.

On va faire une simulation à l'aide de Python pour trouver expérimentalement une valeur approchée de π.

Pour ce faire il faudrait connaître la formule relative à la fonction déssinée.

Ainsi soit un point $M(x, y)$ appartenant au quart de cercle (dont le rayon vaut 1) comme on l'a représenté ci-dessus. En appliquant le théorème de Pythagore (et en se souvenant que x et y désigne tous deux des nombres positifs) on obtient $x^2 + y^2 = 1^2 \Longleftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow y = \sqrt{1-x^2}$.

La fonction f dont la représentation graphique est le quart de cercle dans le carré est $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. On peut désormais faire tourner sur python l'algorithme qui nous donnera une approximation de π.

```
File  Edit  Format  Run  Options  Window  Help
from random import *
from math import *

def echantillon(n):
    Nombre=0
    for i in range(n):
        x=random()
        y=random()
        if y<sqrt(1-x*x):
            Nombre=Nombre+1
    return Nombre/n

n=10000000
print("une approximation de pi est",4*echantillon(n))
```

```
File  Edit  Shell  Debug  Options  Window  Help
Python 3.6.9 (default, Apr 18 2020, 01:56:0
[GCC 8.4.0] on linux
Type "help", "copyright", "credits" or "lic
>>>
 RESTART: /home/muaddib/Documents/2019-2020
ions/montecarlo.py
0.7784
>>>
 RESTART: /home/muaddib/Documents/2019-2020
ions/montecarlo.py
une approximation de i est 3.1348
>>>
 RESTART: /home/muaddib/Documents/2019-2020
ions/montecarlo.py
une approximation de pi est 3.14232
>>>
 RESTART: /home/muaddib/Documents/2019-2020
ions/montecarlo.py
une approximation de pi est 3.1411292
>>>
```

On a simulé ici un million de lancers pour obtenir que $\pi \simeq 3.1411292$ qui est une approximation « médiocre » de π mais qui est tout de même une approximation de π.