Présentation du problème

Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un rectangle. Le point A' est le symétrique du point A par rapport à B, B' est le symétrique du point B par rapport à C, C' est le symétrique du point C par rapport à D et D' est le symétrique du point D par rapport à A.

On se demande quelle est la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$. On conjecture qu'il s'agit d'un parrallélogramme. Pour le démontrer il suffit d'établir que $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$.

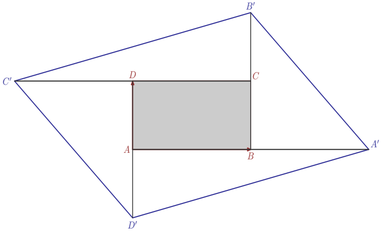


Figure 1: Un quadrilatère

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

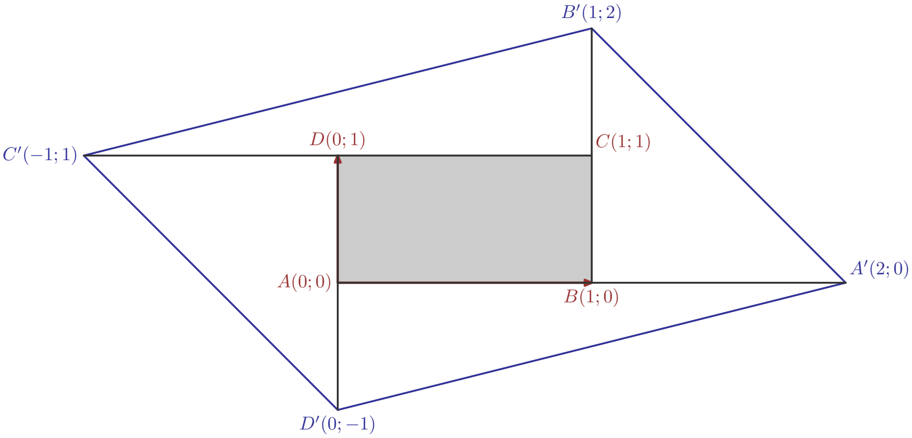


Figure 2: La figure avec les coordonnées

On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

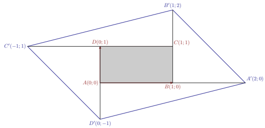


Figure 3: La figure avec les coordonnées

- On lit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$ avec facilité : pour aller de A' à B' on se déplace de 1 unité à gauche en abscisse et 2 unités en haut en ordonnée d'où $\overrightarrow{A'B'}(-1;2)$. De même on lit $\overrightarrow{D'C'}(-1;2)$.
- De manière plus formelle à l'aide de la relation de Chasles on exprime le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ et le vecteur $\overrightarrow{D'C'}$ en fonction des vecteurs de base :
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DC'} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$
- $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$ ce qui équivaut à $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

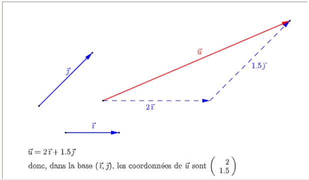
Base du plan vectoriel - Définition

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ qui n'ont pas la même direction (on dit aussi qui ne sont pas colinéaires, autrement que l'on ne peut pas représenter sur la même ligne) définissent une base.
Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ c'est-à-dire il existe deux nombres réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$$

On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnée $(x; y)$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

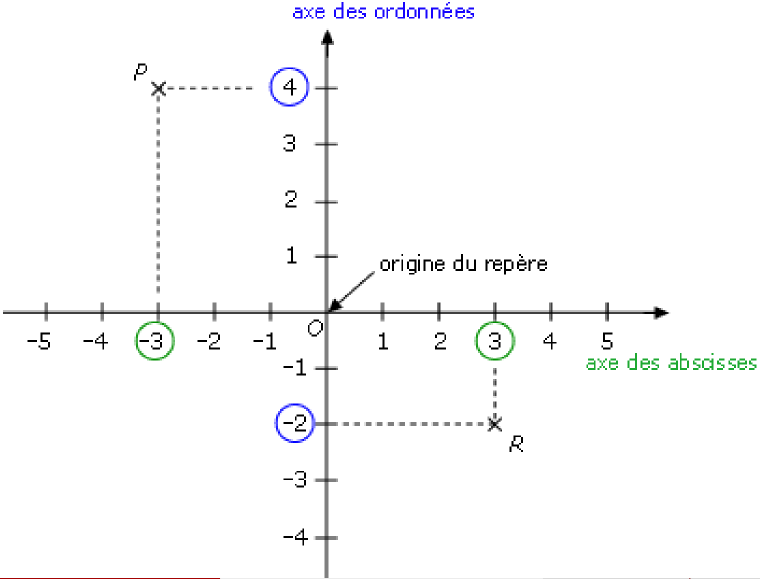


Définition : repère

Définition

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan et soit O un point. On fabrique un repère du plan en ajoutant un point (quelconque) O que l'on appelle l'origine à la base$(\vec{i}, \vec{j})$.
Par convention si on note le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ alors la droite $(O\vec{i})$ s'appelle l'axe des abscisses (et on la représente horizontalement en général) et la droite $(O\vec{j})$ s'appelle l'axe des ordonnées.
O qui est l'intersection des deux axes s'appelle l'origine du repère.
Tout point M du plan peut etre repéré par deux coordonnées sur les droites $(O\vec{i})$et$(O\vec{j})$.
On dit que ces deux nombres sont les coordonnées du point M. Le premier que l'on note x est son abscisse, le second que l'on note y est son ordonnée.
Dans le cas où les axes sont perpendiculaires, on dit que le repère est orthogonal, dans le cas où les axes sont perpendiculaires et $||\vec{i}|| = ||\vec{j}||$

Repère orthonormé



Coordonnée d'un vecteur

Contexte : On se place dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y; B)$

Théorème

Le vecteur $\left(\overrightarrow{AB}\right)$ *a pour coordonnées :*

$$\left(\overrightarrow{AB}\right)(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

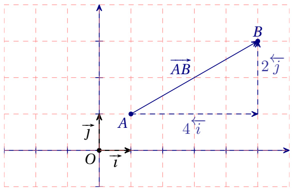


Figure 6: Coordonnée

Ici les points $A(1; 1)$ et $B(5; 3)$ par conséquent le vecteur $\overrightarrow{AB}(5 - 1; 3 - 1)$ donc :

$$\overrightarrow{AB}(4; 2)$$

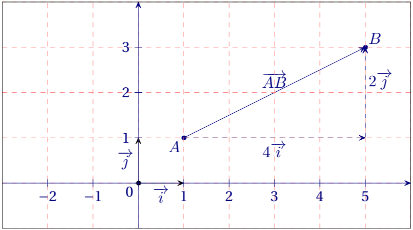
Norme d'un vecteur

Contexte : On se place dans un repère **orthonorme** $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y; B)$
En appliquant le théorème de Pythagore on montre immédiatement que :

Théorème

Le norme (c'est-à-dire la longueur) du vecteur $\left(\overrightarrow{AB}\right)$ *est :*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Ici le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnée $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ donc sa longueur est :

$$AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Coordonnée du milieu d'un segment

Contexte : On se place dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y; B)$

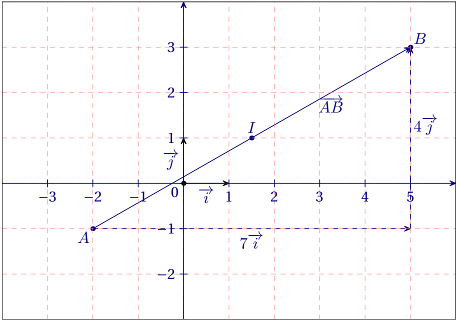


Figure 8: Milieu

Vu que $A(-2; -1)$ et $B(5; 3)$:

- l'abscisse de I s'obtient en ajoutant à l'abscisse de A la moitié de l'abscisse de $\overrightarrow{AB}$:

$$x_I = x_A + \frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{2} = -2 + 3.5 = \frac{3}{2}$$

- l'ordonnée de I s'obtient en ajoutant à l'ordonnée de A la moitié de l'ordonnée de $\overrightarrow{AB}$:

$$y_I = y_A + \frac{y_B - y_A}{2} = -1 + 2 = 1$$

Coordonnée du milieu d'un segment

Contexte : On se place dans un repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y; B)$
Au final les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ s'obtiennent en effectuant les moyennes des coordonnées des points A et B :

Théorème

I a pour coordonnées :

$$I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Dans l'exemple précédent $A(-2; -1)$ et $B(5; 3)$ on a :

$$I\left(\frac{-2+5}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) \iff I\left(\frac{3}{2}; 1\right)$$

Vidéos

- Lire les coordonnées d'un vecteur :
  https://youtu.be/8PyiMHtp1fE
- Calculer la longueur d'un segment :
  https://youtu.be/pP8ebg8W9o8
- Calculer les coordonnées du milieu :
  https://youtu.be/YTQCtSvxAmM

A lire

- Cours
  http://wicky-math.fr.nf/pdf2/Coronatravail/TSTMG/Cours_ICD
- Cours (autre version)
  http://wicky-math.fr.nf/pdf2/Coronatravail/2nde/CM_7.pdf
- La page qui résume tout
  http://wicky-math.fr.nf/index.php/coronatravail

- Thank You.