Les Vecteurs du plan

Cours et Applications

Par *D. Zancanaro*

« Déjà essayé. Déjà échoué. Peu importe. Essaie encore. Échoue encore. Échoue mieux. »
Samuel Beckett

Résumé

Vous allez découvrir dans ce chapitre un nouvel objet mathématique : le vecteur. On le représente par une flèche, plus ou moins longue, qui pointe dans une direction. Elle n'est ancrée à rien, même si elle peut se fixer sur un point précis d'un objet physique ...
Telle est l'essence étrange des vecteurs, à mi-chemin entre une droite bien concrète et une représentation abstraite. Représentation de quoi ? D'un mouvement ou d'une force physique, comme la gravité qui nous rive au sol ...
Le mot vecteur vient du latin "vector", dérivé du verbe "vehere", qui signifie transporter. Un vector pourrait donc désigner un véhicule, par exemple un chariot, son point de départ n'ayant pas d'importance sur sa nature.
De fait, c'est le caractère abstrait des vecteurs qui explique qu'ils aient mis des siècles pour passer de la notion intuitive à un concept mathématique et physique formel, au XIX^e siècle.
En particulier, c'est la nature peu maniable de la droite géométrique, telle que l'avait définie le grec Euclide au III^e avant JC, qui a progressivement conduit à la formalisation des vecteurs. En effet, Euclide décrit dans son ouvrage L*es Elements* la droite comme « une longueur sans largeur », dont « les limites sont des points »et « qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle ». Si ces définitions conduisent à l'idée de distance entre points, cela laisse peut de place aux opérations mathématiques... Quelles manipulations sont permises ? ?
Mais l'oeuvre d'Euclide traverse les siècles et progressivement les manipulations de figures sont associées à des équations algébriques qui libèrent la droite de ses contraintes géométriques, notamment au XI^e sicèle, grâce au le poète, philosophe et mathématicien perse Omar Khayyâm. La symbiose entre la géométrie et l'algèbre se fera au XVII^e siècle, grâce à René Descartes et son invention des coordonnées (dites cartésiennes).
Pourtant c'est la physique, entre 1604 et 1687, qui rendra les vecteurs indispensables, car ils incarneront les notions de vitesse, d'accélération et de force s'exerçant sur un solide. C'est Galilée qui lance ce processus, par la découverte des premières lois du mouvement d'un solide.
Chez Galilée, les notions de vitesse et d'accélération restent informelles, tout comme celle de force qui attire les corps vers le sol, mais elles conduiront l'anglais Isaac Newton, en 1687, à leur donner un sens clair via le concept de vecteur.
Newton instaure également les règles d'addition entre forces, entre accélérations, entre vitesses ... qui sont celles des vecteurs tels qu'on les connait aujourd'hui.
Pour finir, disons que les savants du XIX^e incluront les vecteurs dans un cadre plus large, celui des tenseurs, dont Einstein fera grand usage dans sa théorie de la relativité, qui généralise la théorie de Newton.

Mais tout cela n'aurait pu aller si loin sans repérage ... En effet, manipuler les vecteurs devient très simple une fois que l'on a introduit un repère. C'est pour cela que nous allons également revoir les bases de repérage dans le plan, utiles à bien d'autres occasion d'ailleurs. Par exemple, les planisphères et les cartes géographiques maritimes sont construits dans un repère comprenant l'axe vertical des latitudes et l'axe horizontal des longitudes. La position d'un bateau peut alors être définie par ses coordonnées sur la carte, c'est-à-dire la longitude et la latitude.
Lorsque l'on cherche une position sur un plan de ville, on se repère également à l'aide des axes verticaux et horizontaux du plan.

1 Vecteurs et coordonnées

1.1 Coordonnées d'un vecteur

On se place dans un repère du plan (O, I, J).

Definition 1. Soit $\vec{u}$ un vecteur et M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées du $\vec{u}$ sont alors les coordonnées du point M.

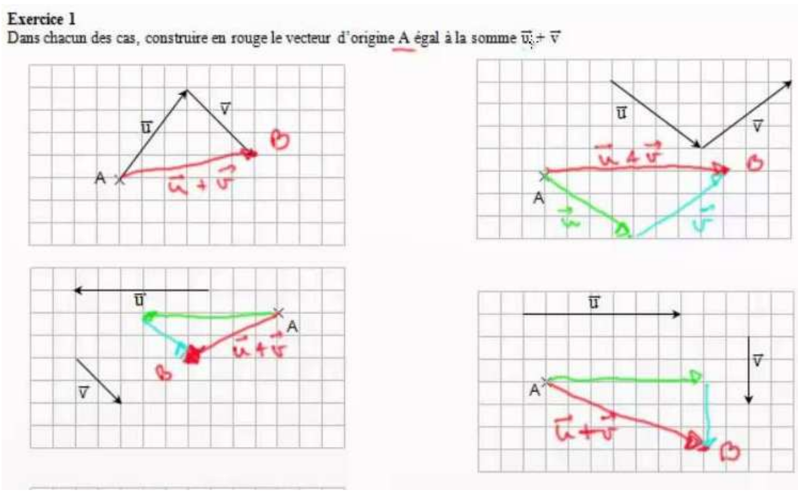
Propriété 1. *Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :*

$$\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

Exemple. Si $A(5; 4)$ et $B(7; -3)$ alors $\overrightarrow{AB}\,(7 - 5; -3 - 4)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}(2; -7)$.

Propriété 2. *Soit $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs du plan et $k \in \mathbb{R}$. On a :*

1. *Egalité de vecteurs : $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x'$ et $y = y'$.*
2. *Somme de deux vecteurs : Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$.*
3. *Produit d'un vecteur par un réel : Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$.*



Exercice 1. Dans un repère orthonormal on considère les points $A(-3; 1)$, $B(1; 1)$ et $C(-1; 3)$.

1. Soit $F(x_F; y_F)$ tel que $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BC}$. Déterminer les coordonnées de F.
2. Préciser la nature du quadrilatère $AFCB$.
3. Soit $D(x_D; y_D)$ tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Déterminer les coordonnées de D.

1. Les coordonnées de $\overrightarrow{AF}(x_F - (-3); y_F - 1) \iff \overrightarrow{AF}(x_F + 3; y_F - 1)$ et $\overrightarrow{BC}(1 - (-1); 1 - 3) \iff \overrightarrow{BC}(2; -2)$. On traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BC} \iff \begin{cases} x_F + 3 & = 3 \times 2 \\ y_F - 1 & = 3 \times (-2) \end{cases} \iff \begin{cases} x_F & = 6 - 3 = 3 \\ y_F & = -6 + 1 = -5 \end{cases}$$

Au final $F(3; -5)$.

2. $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{BC}$ donc les droites (AF) et (BC) sont parallèles donc le quadrilatère $AFCB$ est un trapèze.
3. On calcule les coordonnées des trois vecteurs $\overrightarrow{AD}(x - D + 3; y_D - 1)$, $\overrightarrow{AB}(1 - (-3); 1 - 1)$ d'où :

$$\overrightarrow{AB}(4; 0)$$

et $\overrightarrow{AC}(-1 - (-3); 3 - 1) \iff \overrightarrow{AC}(2; 2)$.
On traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \iff \begin{cases} x_D + 3 & = 4 + 2 \\ y_D - 1 & = 0 + 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_D & = 6 - 3 = 3 \\ y_D & = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

Au final $D(3; 3)$.

2 Colinéarité de deux vecteurs

2.1 Définition

Dans un repère, on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Definition 2. Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires lorsqu'ils ont la même direction.

Remarque. On parle de parallélisme entre droite et de colinéarité entre vecteurs.

Théorème 1. *Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.*
Autrement dit, les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles ce qui revient à dire que :

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} // \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow xy' - yx' = 0$$

Convention : Le vecteur nul est colinéaire à tout les vecteurs du plan.

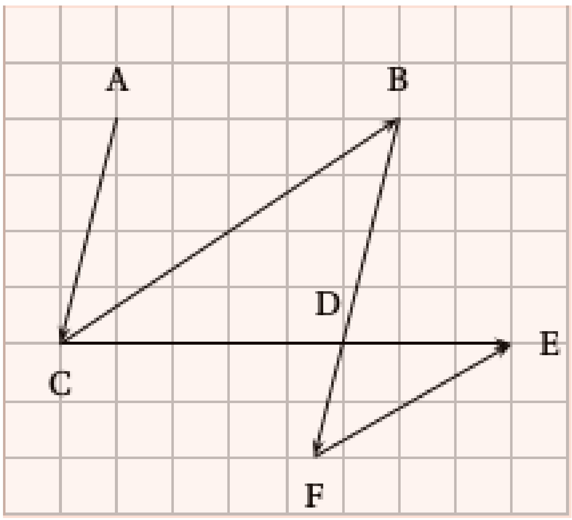
Definition 3. le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel noté $det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ tel que :

$$det(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}) = xy' - yx'$$

On retraduit le résultat précédent de la manière suivante

Théorème 2. *Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$.*

Exemple. On considère la figure suivante :



On observe que $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{FE}$, il s'en suit que $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires. De même $\overrightarrow{BF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ par conséquent $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4.5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ? Même question pour $\vec{s}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{g}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.2 Applications

Propriété 3. *Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts.*
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 4. *Soient A, B et C trois points du plan deux à deux distincts.*
Les points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 3. On donne $A(-4;-1)$, $B(-1;1)$, $C(3;3)$, $D(-1;-3)$ et $E(5;1)$.

1. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
2. En déduire la nature du quadrilatère $ABED$
3. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

Exercice 4. Soit ABC un triangle et M tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que A, M et N sont alignés.