∽ Travaux dirigées 4 ∽
Les nombres complexes

Exercice 1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+2i$ et $z_B = 2-i$. Déterminer l'affixe de C tel que OABC soit un parallélogramme :

1. en utilisant les affixes de vecteurs ;
2. en utilisant les affixe d'un milieu.

Exercice 2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2}i$, $z_B = 2+\frac{1}{2}i$, $z_C = 1-\frac{3}{2}i$ et $z_D = -1-\frac{1}{2}i$.

1. Placer les points sur un graphique puis déterminer l'affixe du milieu I du segment [AC].
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer l'affixe du point E symétrique de A par rapport à B.

Exercice 3. La plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives $2-i$; $2i$ et $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. Déterminer les affixes des points A′ et B′ symétriques de A et B par rapport à O
3. Lire l'affixe du symétrique C′ de C par rapport à l'axe réel, puis déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{CC'}$

Exercice 4. Dans le plan complexe, on donne les points avec leurs affixes :

$$A(1) \qquad B(-2-i) \qquad \text{et} \qquad C(4i)$$

Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

Exercice 5. En utilisant les propriétés du conjugué, écrire le conjugué du nombre complexe donné et le mettre sous forme algébrique :

1. $z_1 = (2-3i)(-1+i)$
2. $z_2 = \dfrac{i(2-i)}{i-3}$

Exercice 6. Soit $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$ un repère orthonormal direct du plan et a et b deux réels.
Déterminer l'ensemble des points $M(a;b)$ du plan tels que le nombre complexe $z = 2a+b+i(b-1)$ soit :

1. un réel
2. un imaginaire pur
3. nul

Exercice 7.

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1. (a) Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6
   (b) Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   (c) Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1+\mathrm{i}$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

Exercice 8. On considère le nombre complexe

$$z = 1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})$$

1. Ecrire z^2 sous forme algébrique
2. Déterminer le module et un argument de z^2

3. Indiquer le signe de la partie réelle de z et celui de la partie imaginaire, puis, à l'aide des propriétés sur le module et l'argument, déterminer le module et un argument de z.
4. Déduire de ce qui précède $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$ puis $\cos\dfrac{\pi}{12}$ puis $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 9. Pour tout nombre complexe z, on définit :

$$\mathrm{P}(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

1. Calculer $\mathrm{P}(2)$.
   Déterminer une factorisation de $\mathrm{P}(z)$ par $(z-2)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{P}(z) = 0$
   On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation autres que 2, z_1 ayant une partie imaginaire positive. Vérifier que $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$.
   Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.
3. (a) Placer, dans le plan, muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O};\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ (unité graphique : 2 cm), les points : A d'affixe 2, B et C d'affixes respectives z_1 et z_2, et I le milieu de [AB].
   (b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle.
   En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{\mathrm{OI}})$.
   (c) Calculer l'affixe z_{I} de I, puis le module de z_{I}.
   (d) Déduire des résultats précédents les valeurs exactes de $\cos\dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{3\pi}{8}$

Exercice 10.

1. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + az + b) \forall z \in \mathbb{C}$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$. On appelle j la solution de partie imaginaire positive. Que vaut j^3 ?
3. Etablir que $j^2 = \dfrac{1}{j} = \overline{j}$
4. Donner la forme algébrique de j^n suivant les valeurs de l'entier n dans $\mathbb{N}$

Exercice 11. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$.
On note i le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
On considère le point A d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$ et le point B d'affixe $z_{\mathrm{B}} = \mathrm{i}$.
À tout point M d'affixe $z_{\mathrm{M}} = x + \mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $z_{\mathrm{M'}} = -\mathrm{i}z_{\mathrm{M}}$.
On désigne par I le milieu du segment [AM].
Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2OI (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend
   $z_{\mathrm{M}} = 1 - \sqrt{3}i$.
   (a) Déterminer le module et un argument de z_{M}.
   (b) Montrer que $z_{\mathrm{M'}} = -\sqrt{3} - \mathrm{i}$.
   Déterminer le module et un argument de $z_{\mathrm{M'}}$.
   (c) Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $(\mathrm{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.
2. On revient au cas général en prenant $z_{\mathrm{M}} = x + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$.
   (a) Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.
   (b) Déterminer l'affixe du point M′ en fonction de x et y.
   (c) Écrire les coordonnées des points I, B et M′.
   (d) Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM′.
   (e) Montrer que BM′ = 2OI.