2014-2015

Lycée Jean Durand

Mathématiques

Cours

Les Nombres Réels

Rédaction :

David Zancanaro

Réalisé à l'aide de :

LaTeX

Table des matières

I. Les entiers naturels : définitions et généralités

I.1. Définitions et notations

Définition 1.

Un **entier naturel** est un nombre positif permettant fondamentalement de dénombrer des objets comptant chacun pour un et donc de compter des objets considérés comme équivalents : un jeton, deux jetons… une carte, deux cartes, trois cartes… Un tel nombre entier peut s'écrire avec une suite finie de chiffres en notation décimale positionnelle (sans signe et sans virgule).
Chaque nombre entier a un successeur unique, c'est-à-dire un entier qui lui est immédiatement supérieur, et la liste des entiers naturels est infinie.

Notations : L'ensemble de tous les nombres entiers naturels se note $\mathbb{N}$, ainsi :

$$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;\dots\}$$

Remarque : L'étude des entiers naturels et de leurs relations, avec les opérations d'addition et de multiplication notamment, constitue dès l'Antiquité grecque une branche des mathématiques appelée « arithmétique ».
Il peut être intéressant de parler des hotels de Hilbert.

I.2. Exemples d'entiers naturels particuliers

⋆) 0 est le seul nombre à la fois positif et négatif ; il est le plus petit des entiers naturels. Il est encore l'élément neutre de l'addition c'est-à-dire quelque soit le nombre réel x on a :

$$x+0=0+x=x$$

Il sert de base pour définir l'opposé d'un nombre x : tout nombre réel x admet un unique opposé $-x$ qui vérifie :

$$x+(-x)=0$$

C'est la propriété que l'on utilise pour équilibrer et résoudre les équations.

⋆) 1 est le plus petit entier naturel strictement positif ; il est aussi l'élément neutre de la multiplication c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{on a} \qquad x\times 1 = 1\times x = x$$

Il sert de base pour définir l'inverse d'un nombre non nul x : tout nombre réel x distinct de 0 admet un unique inverse $\frac{1}{x}$ qui vérifie :

$$x\times\frac{1}{x}=1$$

Il s'agit de l'autre propriété que l'on utilise pour équilibrer et résoudre les équations. **Exemple 1.** On cherche le nombre réel x qui vérifie $3x+2=0$.
L'opposé de 2 est -2 que l'on ajoute aux deux membres de l'équation ce qui donne :

$$3x+2-2=0-2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad 3x=-2$$

Enfin l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ et l'on multiplie les deux membres de l'équation par $\frac{1}{3}$ ce qui donne :

$$\frac{1}{3} \times 3x = -2 \times \frac{1}{3} \quad \text{c'est-à-dire} \quad x = -\frac{2}{3}$$

L'équation admet une unique solution qui est le nombre réel $-\frac{2}{3}$; nous pouvons vérifier que ce nombre est bien solution :

$$3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = -2 + 2 = 0$$

⋆) 11 est un nombre entier naturel (c'est-à-dire un nombre entier positif). 11 est aussi un nombre premier c'est-à-dire un nombre entier naturel qui admet exactement deux diviseurs positifs distincts de 1 et de lui-même. 2 est le plus petit des nombres premiers et est le seul nombre pair premier ; en effet tout autre nombre pair n'est pas premier puisqu'on peut le diviser par 2 (ex : $4 = 2 \times 2$ ou $6 = 2 \times 3$). Voici une liste des plus petits nombres premiers :

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad \ldots$$

I.3. Les nombres premiers

Définition 2.

Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même). Ainsi, 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur entier positif ; 0 non plus car il est divisible par tous les entiers positifs. Par opposition, un nombre non nul produit de deux nombres entiers différents de 1 est dit composé. Par exemple $6 = 2 \times 3$ est composé, tout comme $12 = 3 \times 4$ ou 2×6, mais 11 est premier car 1 et 11 sont les seuls diviseurs de 11.

Exercice 1.

1. Donner la liste des nombres premiers inférieur ou égaux à 100 ;
2. 2017 est-il un nombre premier ?
3. Le plus grand nombre premier connu est le nombre premier de Mersenne $2^{74207281} - 1$, qui comporte plus de 22 millions de chiffres en écriture décimale. Les nombres de Mersenne sont les nombres qui s'écrivent de la forme $2^n - 1$, tous les nombres de Mersenne sont-ils premiers ?

Exercice 2. Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3. On pose :

$$a = \frac{p+1}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{p-1}{2}$$

1. Donner la liste des 10 plus petit nombres premiers.
2. Justifier que a et b sont des nombres entiers.
3. Calculer $a^2 - b^2$ en fonction de p.
4. En déduire que tout nombre premier $p \geq 3$ peut s'écrire comme la différence de deux carrés d'entiers.
   Donner cette différence pour $p = 29$.

II. Opérations et nombres entiers

II.1. L'addition

Exercice 3.

1. Obtient-on nécessairement un entier naturel si l'on additionne deux entiers naturels ?
2. On sait que le résultat d'une addition de deux nombres entiers naturels est un nombre pair, que peut-on en déduire ?
3. Même question si le résultat est un nombre impair.
4. Petit programme : on a choisit un nombre, on lui a ajouté 10 et on a obtenu 15. Quel était le nombre de départ ? Même question mais on a obtenu 5.

II.2. La soustraction

Exercice 4. Obtient-on nécessairement un entier naturel si l'on additionne deux entiers naturels ?

Définition 3.

L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$ et représente l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs. $\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Propriété 1.

Tous les entiers naturels sont des entiers relatifs. On dit que $\mathbb{Z}$ contient $\mathbb{N}$, ou encore que $\mathbb{N}$ est contenu dans $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

II.3. La multiplication

Exercice 5.

1. Obtient-on nécessairement un entier si l'on multiplie deux entiers entre eux ?
2. On sait que le résultat de la multiplication d'un nombre par lui même est un nombre pair ?
3. Même question si le résultat est un nombre impair.
4. Que pensez vous de l'affirmation n^2 est pair si et seulement si n est pair ?
5. Petit programme : on a choisit un nombre, on a multiplié par 3 et on a retranché 15. Quel était le nombre de départ si on a obtenu 3 ? 2 ?

II.4. La division

Exercice 6.

1. Que se passe-t-il lorsqu'on divise deux nombres entiers entre eux ?

2. Peut-on effectuer cette division quelque soit les nombres de départ ?
3. Un petit programme ou deux...
4. Quelle est la nature des nombres que l'on obtient en divisant deux nombres entiers ?

Définition 4.

L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbb{Q}$ et représente l'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers : $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \text{ où æ} \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$

Remarque : $b \in \mathbb{Z}^*$ car on ne peut pas diviser par 0.

Propriété 2.

Tous les entiers relatifs a peuvent s'écrire $a = \frac{a}{1}$, donc sont des rationnels. On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

.

Exercice 7. Démontrer que $\mathbb{Q}$ est stable pour toutes les opérations.

Remarque : Deux nombres rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont égaux si et seulement si $ad = bc$ autrement dit :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad = bc$$

III. Résolution d'équation

III.1. Définitions et problèmes

Exercice 8. Le produit de l'âge de Clément dans 10 ans par celui qu'il avait il y a 10 ans est égal à 44. Quel est l'âge de Clément ?

Exercice 9. Vous vous situez au sommet d'une montagne haute de 1000 mètres et vous contemplez l'océan à ses pieds, jusqu'à quelle distance pouvez vous voir ?

Exercice 10. Le nombre d'or est une proportion, définie initialement en géométrie comme l'unique rapport $\frac{a}{b}$ entre deux longueurs a et b telles que le rapport de la somme $a+b$ des deux longueurs sur la plus grande (a) soit égal à celui de la plus grande (a) sur la plus petite (b) c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

On note ϕ le nombre d'or, auquel cas on a $\phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

1. Montrer que $\phi^2 = \dfrac{a+b}{b}$ puis que $\phi^2 = \phi + 1$ ($\star$).
2. Vérifier que $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ satisfait la relation ($\star$).

Définition 5.

Une équation est, en mathématiques, une **égalité** contenant une ou plusieurs **variables**. Résoudre l'équation consiste à déterminer les valeurs que peut prendre la variable pour rendre l'égalité vraie. La variable est aussi appelée **inconnue** et les valeurs pour lesquelles l'égalité est vérifiée **solutions**.

Exercice 11. 5 est solution de l'équation $x-5=0$, $2,1$ est solution de l'équation $10x=21$ tout comme de l'équation $10x+3=24$, l'équation $x^2=2$ admet **deux solutions** $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ tandis que l'équation $x^2=-5$ n'admet aucune solution.

III.2. Equation du premier degré à une inconnue

Définition 6.

Une équation du premier degré à une inconnue x est une équation pouvant se ramener à la résolution d'une équation du type $ax+b=c$ où a, b et c sont des nombres connus. Ce type d'équation possède exactement une solution.

Exercice 12. Résoudre les équations $x+4=7$, $x+1=5$, $x-7=2$. Que peut-on dire des solutions de ces équations ?

IV. Les nombres réels

IV.1. Algorithme de dichotomie

Il existe un unique nombre positif dont le carré vaut 2, on le note $\sqrt{2}$; on définit de la même manière $\sqrt{a}$ où $a \geq 0$ comme l'unique nombre positif dont le carré vaut a.

Cependant cela ne nous dit pas quelle est l'écriture décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 13.

1. Création d'un algorithme de Dichotomie
2. Réalisation sur un ordinateur (? ? ?)
3. Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

IV.2. Généralité

Définition 7.

Un nombre est décimal si et seulement si il peut s'écrire sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exercice 14. Justifier que chacun des nombres suivants est un nombre décimal : $2,52$; $-0,1$; 123 et $\frac{1}{2}$.

Exercice 15. Justifier que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Propriété 3.

Tout nombre rationnel admet une écriture décimale finie ou périodique, de plus tout nombre dont l'écriture décimale est finie ou périodique est un nombre rationnel.

Définition 8.

L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$ et représente l'ensemble des nombres rationnels et des nombres irrationnels. Il contient tous les nombres connus en classe de seconde.

Propriété 4.

Tous les nombres rationnels sont réls. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exercice 16. Donner tous les ensembles de nombes auxquels appartiennent les nombres suivants :

$$3 \qquad -6 \qquad \frac{4}{3} \qquad -\frac{1}{3} \qquad \pi \qquad \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Remarque : $\mathbb{R}$ n'est encore pas assez grand pour résoudre toutes les équations. Par exemple $x^2 = -1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$, on note $S = \varnothing$. Cet ensemble s'appelle l'ensemble vide et ne contient aucun élément.
Cette équation a pourtant une solution dans un ensemble contenant $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{C}$ et appelé l'ensemble des nombres complexes, étudié en classe de terminale S.

$$\mathbb{C} = \left\{a + ib / a \in \mathbb{R};\, b \in \mathbb{R}\, et\, i^2 = -1\right\}$$

Il a été démontré que $\mathbb{C}$ contenait l'ensemble des solutions des équations construites à partir de cet ensemble.

Question : À quel ensemble appartiennent les nombres décimaux ?

Résumé :
L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls se note $\mathbb{N}$. On a $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$. Les éléments de $\mathbb{N}$ sont les entiers naturels.
L'ensemble des entiers positifs et négatifs se note $\mathbb{Z}$. On a $\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont les entiers relatifs.
L'ensemble des nombres pouvant s'écrire comme le quotient de deux entiers se note $\mathbb{Q}$. On a $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{a}{b} \text{ où } a \in \mathbb{Z}\, et\, b \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les nombres rationnels.
L'ensemble des nombres connus en seconde (rationnels et irrationnels) s'appelle l'ensemble des nombres réels. On note $\mathbb{R}$ cet ensemble.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Applications :

1. Les hotels de Hilbert ;
2. périodicité de l'écriture décimale pour les rationnels ;
3. Quel est le plus petit nombre réel strictement positif ?

IV.3. Inéquation du premier degré et intervalle