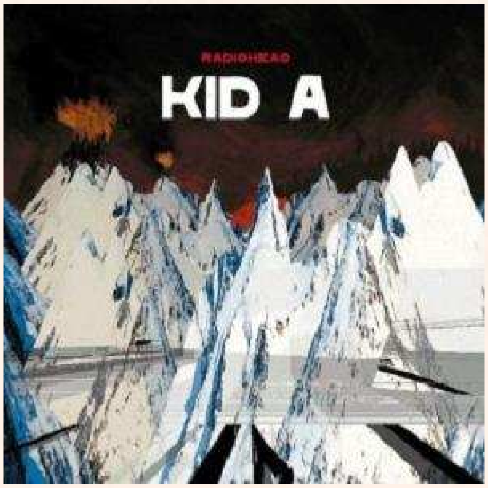
Chapitre 2

Limites (Partie I : Les suites)

Hors Sujet



Titre : « Kid A »
Auteur : Radiohead
Présentation succinte de l'auteur : Alors que les albums précédents (tel OK Computer) restent dans un style rock alternatif, les albums suivants sont beaucoup plus psychédéliques : Kid A marque l'apogée de ce style expérimental de Radiohead. Pour cette raison, il est considéré par beaucoup comme un chef-d'œuvre. Dans cet album, les guitares ont quasiment disparu au profit de synthétiseurs et de sampleurs. Le nom donné à l'album, Kid A (littéralement « Enfant A »), évoque pour certains un premier enfant cloné. Pour d'autres, il laisse penser que le groupe le considère comme son premier enfant. Avec Kid A, l'album suivant de Radiohead, Amnesiac, forme un diptyque de musique expérimentale, un prolongement : Kid A et Amnesiac forment en réalité le diptyque Kid Amnesiac. Selon Thom Yorke et Jonny Greenwood cet album est inspiré en partie par le livre No Logo (Kid A a faillit s'intitulait No Logo), livre qui décrit la société de consommation, de la journaliste canadienne Naomi Klein.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

L'essentiel :

- ⇝ Découvrir les définitions de convergence et divergence
- ⇝ Connaître les limites usuelles et les opérations sur les limites
- ⇝ Savoir trouver la limite d'une forme indéterminée
- ⇝ Utiliser les théorèmes de comparaison
- ⇝ Démontrer qu'une fonction est continue ou non.
- ⇝ Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires

« *I'm not here , This isn't happening* »
Radiohead (Extrait de How To Disappear Completely)

Leçon 2

Limites
(Partie I : Les suites)

Résumé

Même si elles ne constituent qu'un cas particulier des *fonctions numériques* (celles définies sur $\mathrm{I} \subset \mathbb{N}$), les suites méritent une étude à part entière car elles jouent un rôle extrêmement important à la fois en mathématiques et en physique. Elles permettent en effet dans les deux cas de fournir une approximation du « réel ». Après avoir mis en place un raisonnement important et fait quelques rappels de première, nous approfondirons la notion de limite de suite.

Dans tout le chapitre, n et n_0 désignent des entiers naturels.

I. Comportement asymptotique d'une suite

I.1. Notion de convergence et divergence

I.1.a. Cas des suites convergentes

Exercice 1. On considère les suites u et v définies pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Algorithme 1 :

Données: n est un nombre entier et u est un nombre réel.
$n := 1$; $u := 1$
Tant que $(u \geq 10^{-3})$ **Faire**
  $n := n+1$
  $u := \frac{1}{n^2}$
Fin Tant que
Afficher n

1. (a) A quel résultat aboutit la mise en oeuvre de l'algorithme ci-contre ?
   (b) Modifier cet algorithme pour obtenir la plus petite valeur n_0 telle que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $u_n < 10^{-6}$.

(c) Soit ϵ un réel strictement positif.
Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait :

$$0 < u_n < \epsilon$$

On dit que la suite u converge vers 0 ou que la limite de la suite u est 0, on note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

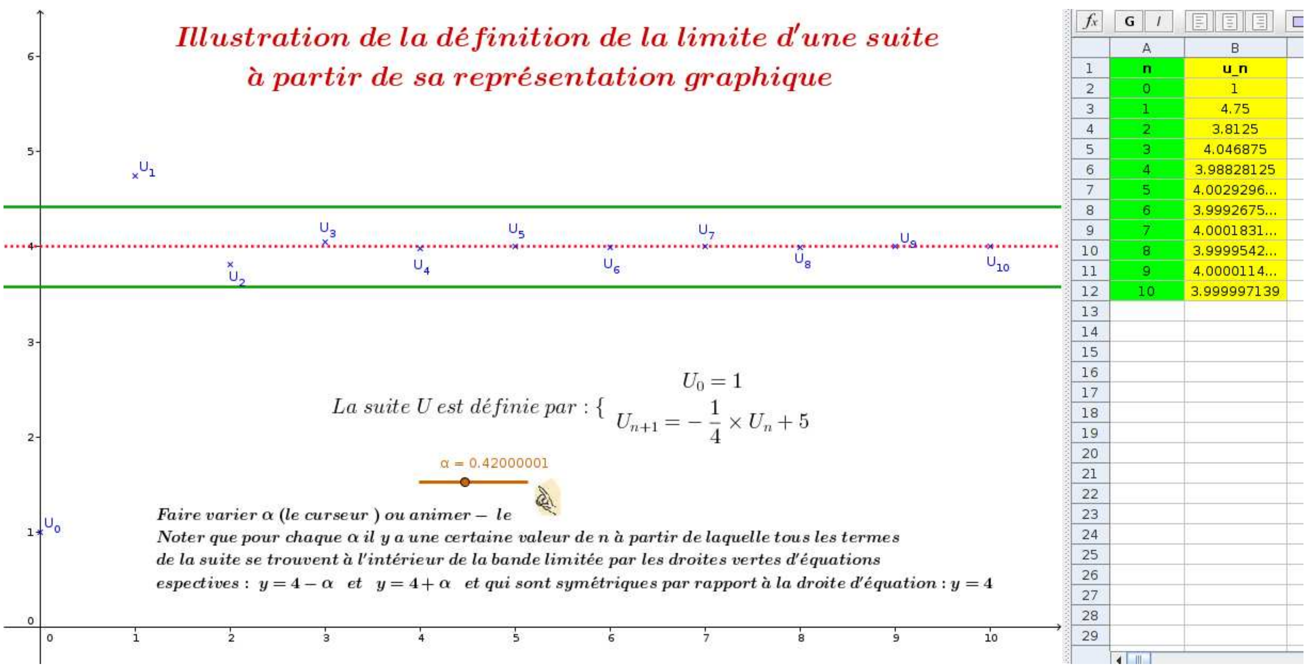
2. Démontrer de façon analogue que la suite v converge vers 0.

Définition 1.

On dit qu'une suite u **admet une limite** ℓ (ou **converge vers** ℓ) lorsque tout intervalle ouvert I contenant ℓ (aussi « petit »soit-il) contient aussi tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang n_0, ie $\forall n \geq n_0$ on a $u_n \in \mathrm{I}$.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \text{on a} \quad \varepsilon - \ell \leq u_n \leq \varepsilon + \ell$$

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.



Remarques :

⇝ Sur cet exemple, le graphique permet de conjecturer que la suite (u_n) converge vers 4

⇝ Concrètement, les termes u_n deviennent aussi proches de ℓ qu'on le souhaite, à partir d'un certain rang.

⇝ On utilise en général un intervalle centré en ℓ.

⇝ Graphiquement, la notion de limite se traduit ainsi :
Quelle que soit la largeur de la bande horizontale choisie, il existe un rang (ou un indice) à partir duquel tous les points de la représentation graphique de la suite sont situés dans cette bande.

⇝ Une suite divergente admet $\pm\infty$ comme limite ou n'admet pas de limite ; comme par exemple c'est le cas de la suite (u_n) définie par $u_n = n$ dont la limite vaut $+\infty$ ou encore de la suite $u_n = (-1)^n$ qui n'admet pas de limite.

Exemples :

1. Conjecturer à la calculatrice les limites éventuelles des suites suivantes, puis les démontrer.
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = \dfrac{5n+1}{n+3}$
   (c) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = (-2)^n$
2. (a) A partir de quel rang N la distance entre u_n et sa limite est-elle strictement inférieur à 0.001 ?
   (b) Même question pour (v_n).

Solutions **:**

1. (a) A la calculatrice, on conjecture que la suite u converge vers 2.
   Soit $\varepsilon > 0$. On résout l'inéquation : $|u_n - 2| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$
   En posant $n_0 = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right) + 1$, pour tout $n \leq n_0$ on a $|u_n - 2| < \varepsilon$.
   (b) A la calculatrice, on conjecture que la suite v converge vers 5.
   Soit $\varepsilon > 0$. On résout l'inéquation :
   $$|u_n - 5| < \varepsilon \iff \left|\frac{-14}{n+3}\right| < \varepsilon \iff \frac{14}{n+3} < \varepsilon \iff n > \frac{14}{\varepsilon} - 3$$
   En posant $n_0 = \mathrm{E}\left(\dfrac{14}{\varepsilon} - 3\right) + 1$, pour tout $n \leq n_0$ on a $|u_n - 5| < \varepsilon$.
   (c) La suite (w_n) ne peut pas converger car elle prend alternativement les valeurs 1 et -1.
2. Dans les deux cas, résoudre les inéquations nous donnait le plus petit N possible donc :
   (a) Pour $\varepsilon = 0.001$ on a $n_0 = \mathrm{E}(1000) + 1 = 1001$.
   (b) Pour $\varepsilon = 0.001$ on a $n_0 = \mathrm{E}(14000 - 3) + 1 = 13998$.

Une méthode pour déterminer la limite ℓ d'une suite

⇝ On peut utiliser la calculatrice pour conjecturer sa limite

⇝ On pose $\varepsilon > 0$ quelconque et on résout $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

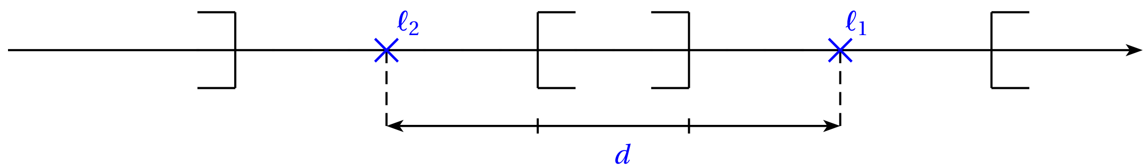
⇝ On choisit alors n_0 =partie entière de la solution trouvée $+1$

Théorème 1.

Si une suite (u_n) converge alors sa limite ℓ est unique.

Preuve

Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) admet deux limites ℓ_1 et ℓ_2 telles que $\ell_1 < \ell_2$.
Notons $d = \ell_2 - \ell_1$ Par définition, l'intervalle ouvert I_1 de centre ℓ_1 et de rayon $\dfrac{d}{3}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, de même l'intervalle ouvert I_2 de centre ℓ_2 et de rayon $\dfrac{d}{3}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Par conséquent $\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2$ est un intervalle contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Mais on a le schéma suivant :



Donc $\mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2 = \emptyset$, ce qui est absurde. Par conséquent la suite (u_n) ne peut admettre qu'une limite.

Remarque : Si (u_n) admet une limite, alors toute sous-suite de (u_n) admet la même limite.
On utilisera en général ce résultat :

- Pour les suites récurrentes, car la sous-suite (u_{n+1}) admet la même limite éventuelle ℓ que (u_n).
  Ainsi, si ℓ existe, elle vérifie l'égalité $\ell = f(\ell)$ dans le cas où la fonction f est continue (ce qui sera presque tout le temps le cas cette année, on y reviendra).
- Pour sa contraposée, en montrant que deux sous-suites de (u_n) n'ont pas la même limite.
  Comme la limite est unique et que (u_n) doit avoir la même que n'importe laquelle de ses sous-suite, (u_n) ne peut pas admettre de limite, elle diverge.

La réciproque est fausse.

I.1.b. Cas des suites divergentes

Définition 2.

On dit qu'une suite qui ne converge pas est divergente. Une suite divergente admet $\pm\infty$ comme limite ou n'admet pas de limite.

Exemple :

Voici quelques suites divergentes :

- $u_n = n$
- $u_n = n^3 - n^2 + n - 1$
- $u_n = (-1)^n$

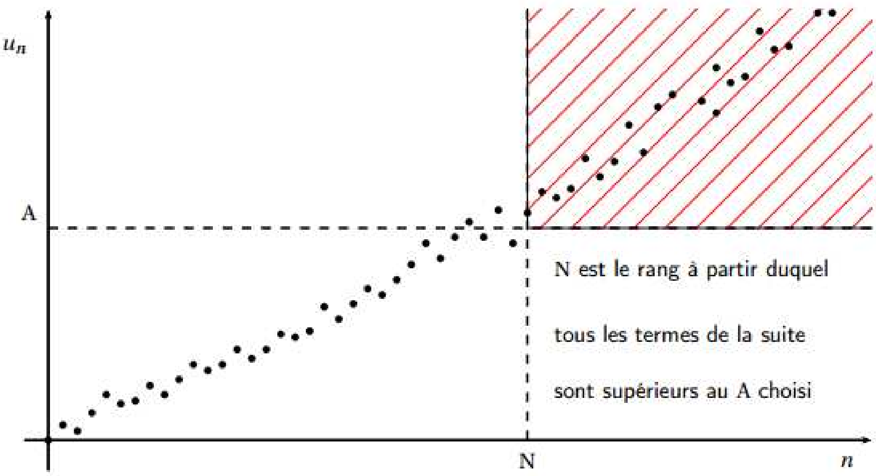
Définition 3.

On dit qu'une suite u diverge vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert du type $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang n_0 (dépendant du A considéré), i.e. $\forall n \geqslant n_0$ on a $u_n > \mathrm{A}$.

$$\forall \mathrm{A}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \text{on a} \quad u_n \geq \mathrm{A}$$

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

On définit de même la divergence vers $-\infty$ à l'aide d'intervalle du type $]-\infty;\mathrm{A}[$. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.



Remarque : Dire que (u_n) tend vers $+\infty$ revient à dire que :

- ⇝ Concrètement, les termes u_n deviennent aussi grands qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.
- ⇝ Tout intervalle de la forme $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux (les premiers).

Exemples :

1. Démontrer que chacune des suites suivantes diverge vers $\pm\infty$:
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme génral $u_n = n$
   (b) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = n^2$
   (c) $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme génral $w_n = -(n+1)^2$
2. (a) A partir de quel rang a-t-on $u_n > 10^6$?
   (b) Même question pour v_n.
   (c) A partir de quel rang a-t-on $u_n < -10^6$?

Solutions :

1. (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. En effet :
   Soit $A<0$. Alors pour tout $n\geq 0$ on a $u_n = n > A$, donc on peut choisir $n_0 = 0$.
   Soit A un réel positif. Il suffit de choisir $n_0 = A+1$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$. En effet :
   Soit $A<0$. Alors pour tout $n\geq 0$ on a $u_n = n^2 > A$, donc on peut choisir $n_0 = 0$.
   Soit A un réel positif. On veut montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]A;+\infty[$.
   On remarque que $u_n > A \Longleftrightarrow n^2 > A \Longleftrightarrow n > \sqrt{A}$.
   Si on choisit n_0 le premier entier supérieur strictement à $\sqrt{A}$, i.e. $n_0 = E\left(\sqrt{A}\right)+1$ alors $u_n = n^2 > A$ pour tout $n \geq n_0$. Donc ce n_0 convient.

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$. En effet :
   Soit $A>0$. Alors pour tout $n\geq 0$ on a $u_n = n^2 > A$, donc on peut choisir $n_0 = 0$.
   Soit A un réel négatif. On veut montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]-\infty;A[$.
   On remarque que $w_n < A \Longleftrightarrow -(n+1)^2 < A \Longleftrightarrow n > \sqrt{-A}-1$.
   Si on choisit n_0 le premier entier supérieur strictement à $\sqrt{A}$, ie $n_0 = E\left(\sqrt{|A|}-1\right)+1 = E\left(\sqrt{|A|}\right)$ alors $v_n < A$ pour tout $n \geq n_0$. Donc ce N convient.

2. Dans tous les cas on a choisit le plus petit n_0 convenable. Donc :
   (a) Pour $A = 10^6$ on a $n_0 = 10^6+1$.
   (b) Pour $A = 10^6$ on a $n_0 = 10^3+1$.
   (c) Pour $A = -10^6$ on a $n_0 = 10^3$.

Une méthode pour montrer qu'une suite diverge vers $+\infty$

- ⇝ On traite le cas $A<0$ trivialement.
- ⇝ On pose $A>0$ quelconque et on résout $u_n > A$.
- ⇝ On choisit alors n_0 =partie entière de la solution trouvée $+1$

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$

Solutions :

Soit $A \in \mathbb{N}$. Comme la suite (u_n) est croissante, on veut montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$. En effet, dans ce cas l'intervalle ouvert $]A;+\infty[$ contiendra tous les termes de la suite à partir de n_0.
Notons $\mathscr{P}(A)$ la propriété suivante : Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$

- ⇝ **Initialisation** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie, en effet $u_1 > 0$
- ⇝ **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(A)$ soit vraie, montrons que $\mathscr{P}(A+1)$ est vraie, i.e. qu'il existe n_1 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à $A+1$. On remarque que

$$u_{2n} = u_n + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq u_n + n \times \frac{1}{2n} = u_n + \frac{1}{2}$$

Solutions :

Puisque $\mathscr{P}(\mathrm{A})$ est vraie, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \mathrm{A}$, par conséquent :

$$u_{4n_0} \geq u_{2n_0} + \frac{1}{2} \geq u_{n_0} + 1 > \mathrm{A} + 1$$

Donc à partir de $n_1 = 4n_0$, tous les termes de la suite sont supérieurs à $\mathrm{A}+1$. Ainsi $\mathscr{P}(\mathrm{A}+1)$ est vraie. On vient de démontrer, par récurrence, que (u_n) est une suite qui diverge vers $+\infty$

I.2. Limites usuelles

Théorème 2.

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Pour tout entier $k \geq 1$:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

Preuve

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
  Soit A un réel positif (le cas négatif est trivial). On veut montrer qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $]\mathrm{A};+\infty[$.
  On remarque que $u_n > \mathrm{A} \iff \sqrt{n} > \mathrm{A} \iff n > \mathrm{A}^2$.
  Si on choisit $\mathrm{N} = \mathrm{E}\left(\mathrm{A}^2\right) + 1$ alors $u_n > \mathrm{A}$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Donc ce N convient.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
  Soit ϵ un réel positif. On veut montrer qu'il existe un rang N à partir duquel tous les termes de la suite appartiennent à $\mathrm{I} =]-\epsilon;+\epsilon[$.
  On remarque que $\frac{1}{n^2} > 0$ pour tout entier n, on cherche donc à déterminer à partir de quel entier n_0 on a :
  $$0 < u_n < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff 0 < \frac{1}{\varepsilon} < n^2 \iff 0 < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$$
  Si on choisit N le premier entier supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ alors $u_n < \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$. Donc ce N convient.

I.3. Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

Cas d'une somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	On ne peut pas conclure directement

Cas d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell\neq 0$	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$	$\ell\times\ell'$	$\pm\infty$ en suivant la règle des signes	$\pm\infty$ en suivant la règle des signes	On ne peut pas conclure directement

Cas d'un quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ ou ∞	0	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell'\neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	0	∞	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ en suivant la règle des signes	On ne peut pas conclure directement	0	On ne peut pas conclure directement

Exemples :

Soient les suites u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n=\frac{2}{3n+5},\qquad v_n=(2n+4)(-5n+7)\qquad \text{et}\qquad w_n=\frac{3-\dfrac{4}{n}}{\dfrac{2}{n}}$$

- Pour la suite u, par somme et produit on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+5)=3\lim\limits_{n\to+\infty}n+5=+\infty$.
  Par quotient on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$
- Pour la suite v, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+4)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(-5n+7)=-\infty$.
  Par produit, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$.
- Pour la suite w, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{4}{n}\right)=3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n}=0$ par valeurs positives.
  Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=+\infty$.

Remarque : Ces règles sur les opérations sont naturelles, si on a un peu de bon sens. Mais il faut être conscient que tous les résultats de ces tableaux se démontrent (et certains ne sont pas évidents). Nous ne présenterons ici aucune démonstration et nous admettrons tous ces résultats.
Il importe surtout de retenir les cas où on ne peut pas conclure directement. On parle de **forme indéterminée**. C'est dans ces cas là qu'on vous demandera essentiellement des limites. Pour les trouver, il vous faudra faire appel à des calculs du type développement, factorisation (souvent par le terme de plus haut degré), etc, afin de transformer l'écriture de la suite, et d'obtenir une forme connue de limite.

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES À CONNAÎTRE

« $\infty - \infty$ » « $0 \times \infty$ » « $\frac{0}{0}$ » « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Attention, on ne dira pas « zéro sur zéro est une forme indéterminée »mais plutôt « le quotient de deux fonctions tendant vers 0 est une forme indéterminée »

Exemples :

Soient les suites u et v, w et t définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n - \sqrt{n}, \qquad v_n = \frac{2n^2+1}{-n^2+3}, \qquad w_n = \frac{-n^3+3}{2n^2-5n+1} \qquad \text{et} \qquad t_n = \frac{2n^2-5n+1}{-n^3+3}$$

⇝ Pour la suite u, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\sqrt{n}\right) = -\infty$.
Il s'agit donc d'une forme indéterminée.
Pour trouver la limite, on factorise : $u_n = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$. Par produit, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

⇝ Pour la suite v, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2n^2+1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-n^2+3\right) = -\infty$.
Il s'agit donc d'une forme indéterminée.
Pour trouver la limite, on factorise le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré :

$$v_n = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(-1+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{-1+\frac{3}{n^2}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \frac{1}{n^2} = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -1 + \frac{3}{n^2} = -1$. Par quotient, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -2$.

⇝ Pour w et t, il s'agit là encore de formes indéterminées. La méthode est la même que précédemment.
On trouvera $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

Remarque : Notons que les trois derniers cas traitent la forme indéterminée « $0 \times \infty$ » puisque $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n^3+1}$$

1. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
2. Rédiger un algorithme sur le logiciel de votre choix qui affiche le premier rang à partir duquel la distance entre u_n et ℓ est strictement inférieure à un réel e choisit par l'utilisateur.

II. Suites majorées, minorées et bornées

II.1. Définition

Définition 4.

On considère une suite (u_n).

- On dit que (u_n) est majorée s'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $u_n < \mathrm{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- On dit que (u_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $u_n > m, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- On dit que (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée i.e s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que

$$m < u_n < \mathrm{M}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque : (u_n) est bornée si et seulement si il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| < \mathrm{M}$.
En effet si tel est le cas alors on a : $-\mathrm{M} < u_n < \mathrm{M}$.
Réciproquement si (u_n) est bornée alors il existe deux réels a et b tels que $a < u_n < b$.
Choisissons $\mathrm{M} = max(|a|;|b|)$, dans ce cas on a $-\mathrm{M} \leq a$ et $b \leq \mathrm{M}$, et donc :

$$|u_n| < \mathrm{M}$$

II.2. Quelques techniques pour montrer qu'une suite est majorée, minorée ou bornée ?

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{n^2}$. Montrons que (u_n) est bornée.

$$\begin{array}{rll} & -1-1 \leq (-1)^n + \sin n \leq 1+1 & \text{en effet } -1 \leq (-1)^n \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin n \leq 1 \\ \iff & -2 \leq (-1)^n + \sin n \leq 2 \quad \text{et} \quad 0 \leq \dfrac{1}{n^2} \leq 1 & \\ \iff & -2 \leq u_n \leq 2 & \end{array}$$

Exercice 3. On considère la suite

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

.

1. Montrer que $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}, \forall k \geq 2$.
2. Montrer que
$$\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$
3. Montrer que
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1$$
.
4. En déduire que u_n est majorée.

Exercice 4. On considère la suite définie par :

$$u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$
2. Dresser le tableau de variation de f
3. En déduire que la suite (u_n) est bornée.

Exercice 5. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6+u_n} \end{cases}$$

Montrer, par récurrence, que cette suite est bornée.

Solutions :

Compte tenu de la définition de la suite (et de la présence du signe radical), on peut minorée la suite par 0, mais par quoi la majorée ? ?
Le calcul des premiers termes, donne ici une indication :

$$u_1 \simeq 2{,}45 \quad u_2 \simeq 2{,}91 \quad u_3 \simeq 2{,}98$$

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $0 \leq u_n \leq 3$ et démontrons cette propriété par récurrence

- $\rightsquigarrow$ **Initialisation** : $\mathscr{P}(0)$ est vraie de manière évidente puisque $u_0 = 0$
- $\rightsquigarrow$ **Hérédité** : Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ l'est aussi.
  Dans ce cas on a : $0 \leq u_n \leq 3$
  Par conséquent : $6 \leq 6+u_n \leq 9$
  Et par passage à la racine : $\sqrt{6} \leq \sqrt{6+u_n} \leq 3$
  Au final : $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$
  Par conséquent $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie, et on vient de montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

  $$0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

  i.e que (u_n) est une suite bornée.

III. Inégalités et limites

III.1. Limites finies

Théorème 3.

Si (u_n) est une suite convergente alors (u_n) est bornée.

Preuve

Notons ℓ la limite de la suite (u_n), alors tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]\ell-1;\ell+1[$ à partir d'un certain rang N. On a alors pour tout $n \geq N$:

$$\ell-1 < u_n < \ell+1$$

Notons $m = min(u_0;u_1;u_2;\dots;u_{N-1};\ell-1)$ et $M = max(u_0;u_1;u_2;\dots;u_{N-1};\ell+1)$, alors on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leq u_n \leq M$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée.

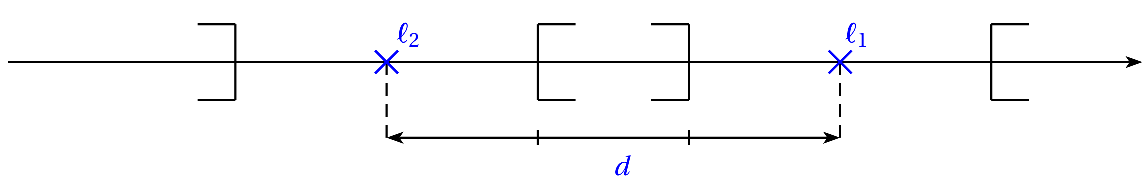
Propriété 1.

Soient u et v deux suites convergentes telles que $u_n < v_n$ ou $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors, dans les deux cas, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n$$

Preuve

Notons ℓ_1 la limite de u, ℓ_2 la limite de v et N_0 le rang à partir duquel $u_n < v_n$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell_1 > \ell_2$.
Notons $d = \ell_1 - \ell_2$ Par définition, l'intervalle ouvert I_1 de centre ℓ_1 et de rayon $\frac{d}{3}$ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang N_1, de même l'intervalle ouvert I_2 de centre ℓ_2 et de rayon $\frac{d}{3}$ contient tous les termes de la suite v à partir d'un certain rang.
On a le schéma suivant :



Preuve (Suite)

Par conséquent à partir de $N = max(N_0, N_1, N_2)$, on a :

- $\rightsquigarrow$ $u_n < v_n$
- $\rightsquigarrow$ $u_n \in I_1$ donc $u_n > \ell_1 - \dfrac{d}{3}$
- $\rightsquigarrow$ $v_n \in I_2$ donc $v_n < \ell_2 + \dfrac{d}{3} < \ell_1 - \dfrac{d}{3} < u_n$

Ce qui est absurde. D'où $\ell_1 \leq \ell_2$.

Attention !

Le cas d'une inégalité stricte sur les termes de la suite et d'une égalité des limites est fréquent.

Exemple :

Soient u et v les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.
Alors à partir de $N_0 = 2$ on a $n^2 > n \iff \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n} \iff u_n < v_n$.
Or on sait déjà que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. On est donc dans le cas où $\ell_1 = \ell_2$.

Remarque : On sait qu'une suite convergente est bornée par $M \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$, donc ce théorème nous indique que sa limite ℓ est telle que :

$$m \leq \ell \leq M$$

En effet, il suffit de prendre pour (v_n) la suite constante égale à M, alors on a $\ell \leq M$. On procède de même pour m.

Théorème 4. (des gendarmes)

Soit u, v et w trois suites et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que :

1. à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$

Alors v converge aussi et on a $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell$

Preuve

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ. Notons N_0 le rang à partir duquel on a $u_n \leq v_n \leq w_n$
N_1 le rang à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont contenus dans I et N_2 le rang à partir duquel tous les termes de la suite (w_n) sont contenus dans I.
Notons $N = max(N_0; N_1; N_2)$, alors on a :

- $\rightsquigarrow$ à partir du rang N, $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $\rightsquigarrow$ D'après le point précédent, tous les termes de la suite v_n sont contenus dans I à partir du rang N, ce qui prouve que la suite (v_n) converge vers ℓ

Exemple :

Soient les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \dfrac{3\cos(n)}{n^2}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n + 3n^2}{n^2}$.

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $-1 \leq \cos(n) \leq 1$ donc $1 - \dfrac{3}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \dfrac{3}{n^2}$.
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{3}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{3}{n^2}\right) = 1$.
  D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ donc $\dfrac{-1+3n^2}{n^2} \leq v_n \leq \dfrac{1+3n^2}{n^2}$.
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1+3n^2}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+3n^2}{n^2} = 3$.
  D'après le théorème des gendarmes, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$.

III.2. Limites infinies

Théorème 5. (Théorème de comparaison)

Soient u et v deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Preuve

- Considérons A un réel. On sait que u diverge vers $+\infty$ donc à partir d'un certain rang N tous les termes de la suite u vérifient : $u_n > \mathrm{A}$.
  Par conséquent, à partir du rang N, on a aussi $v_n > \mathrm{A}$, ce qui prouve que v diverge vers $+\infty$.
- La deuxième démonstration est analogue.

Exemple :

Soient les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 3\sin(n)$ et $v_n = -n + 1 + (-1)^n$.

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $n^2 - 3 \leq u_n$.
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(-1)^n \leq 1$ donc $v_n \leq -n + 2$.
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -n + 2 = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

III.3. Application à la suite (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$

Propriété 2.

1. Si $q > 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
2. Si $q = 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
3. Si $-1 < q < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
4. Si $q < -1$, on a (q^n) n'admet pas de limite.

Preuve

On commence par démontrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli (cf p 17 du Déclic ou Exo 10 du chapitre précédent) :

$$\forall x \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a } : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

1. Si $q > 1$ alors $q = q' + 1$ avec $q' > 0$ et on a $q^n = (1+q')^n \geq 1 + nq'$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+nq') = +\infty$ car $q' > 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $q = 1$ alors (q^n) est constante égale à 1 (donc convergente vers 1) .
3. Si $-1 < q < 1$. On pose $q' = \dfrac{1}{|q|}$. Alors $q' > 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(q')^n = +\infty$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \pm \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(q')^n} = 0$.
4. Si $q \leq -1$, alors (q^{2n}) tend vers $+\infty$ tandis que (q^{2n+1}) tend vers $-\infty$.
   Donc (q^n) n'a pas de limite.

Exemple :

Déterminer la limite de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme -3.

IV. Suites monotones et limites

Théorème 6. (Admis)

- Toute suite croissante et majorée de réels converge.
- Toute suite décroissante et minorée de réels converge.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ sur $\mathbb{N}^*$. Cette suite est décroissante minorée par 1, donc elle converge.

Attention !

Ici le minorant trouvé est la limite, mais ce n'est pas toujours le cas ! Le théorème donne l'existence d'une limite mais pas sa valeur.

Exemple :

On considère la suite w définie par

$$\begin{cases} w_0 = 0.6 \\ w_{n+1} = 0.7w_n + 0.1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier n on a $0 \leq w_{n+1} \leq w_n \leq 1$
2. Justifier alors que la suite w est convergente.
3. Préciser la valeur de sa limite.

Solutions :

1. ⇝ Initialisation : $w_1 = 0.52$ donc on a bien $0 \leq w_1 \leq w_0 \leq 1$

   ⇝ Hérédité : On suppose que $\exists k \in \mathbb{N}$, $0 \leq w_{k+1} \leq w_k \leq 1$. Alors on a

   $$0 \leq 0.7w_{k+1} \leq 0.7w_k \leq 0.7 \iff 0.1 \leq 0.7w_{k+1}+0.1 \leq 0.7w_k+0.1 \leq 0.8 \iff 0.1 \leq w_{k+2} \leq w_{k+1} \leq 0.8$$

   Donc on a bien $0 \leq w_{k+2} \leq w_{k+1} \leq 1$. La propriété est héréditaire.

   ⇝ La propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.
2. On déduit de la question précédente que la suite (w_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers un réel ℓ.
3. La suite (w_{n+1}) est une sous-suite de (w_n) donc elle converge vers ℓ.
   De plus, $w_{n+1} = 0.7w_n + 0.1$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.7w_n + 0.1 = 0.7\ell + 0.1$.
   Par unicité de la limite on obtient $\ell = 0.7\ell + 0.1 \iff \ell = \dfrac{1}{3}$.

Théorème 7.

⇝ Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.

⇝ Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Preuve

⇝ Soit (u_n) une suite croissante non majorée et un intervalle $\mathrm{I} =]\mathrm{A}; +\infty[$ $(\mathrm{A} \in \mathbb{R})$. La suite u n'étant pas majorée, il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq \mathrm{A}$.
La suite u étant croissante, tous les termes après le rang n_0 sont supérieurs à A, donc contenus dans I.
Donc la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

⇝ La deuxième partie découle de la première, en considérant la suite $(-u_n)$, croissante non majorée.