∽ CORRECTION DEVOIR SURVEILLÉ 1 ∽
LES SUITES

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. **2 points**

Déterminer la limite de la suite w_n définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{n^2}{n^2+1} + 1$$

Solution

$$w_n = \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} + 1 = \frac{1}{1+1/n^2} + 1$$

Du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ on déduit immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = 1+1 = 2$$

Exercice 2. **4 points**

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète 10000 nouvelles abeilles chaque année.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + 1.$$

1. Résoudre l'équation $x = 0,8x + 1$.

Solution

$$x = 0.8x + 1 \iff 0.2x = 1 \iff x = 5$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$$

Solution

Notons $\mathscr{P}(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
Il s'agit de vérifier que $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 5$
Or, $u_0 = 1$ et $u_1 = 0,8 + 1 = 1,8$ et on a bien vérifié $\mathscr{P}$ pour $n = 0$.
Ainsi $\mathscr{P}$ est initialisée.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 5$
De $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$ on tire que $0 \leq 0,8u_n \leq 0,8u_{n+1} \leq 4$ puis que :

$$1 \leq 0,8u_n + 1 \leq 0,8u_{n+1} + 1 \leq 5 \Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 5$$

donc $\mathscr{P}$ est héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc on a établit la véracité de $\mathscr{P}$ pour tout entier naturel n.

3. En déduire que la suite converge.

Solution

P uisque $u_n < u_{n+1}$ la suite (u_n) est croissante et puisque $u_n < 5$, la suite est majorée par 5 donc d'après le théorème de convergence monotone elle converge vers un nombre réel inférieur ou égal à 5.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter votre résultat.

Solution

P uisque (u_n) converge, notons ℓ sa limite, on a du coup $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8u_n + 1 = 0,8\ell + 1$ et puisque $u_{n+1} = 0,8u_n + 1$, ℓ est solution de l'équation :

$$\ell = 0,8\ell + 1$$

Ainsi d'après la question 1) $\ell = 5$.

Exercice 3. **4 points**

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

1. (a) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;3]$ par $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$. Etudier ses variations sur l'intervalle $[0;3]$.

Solution

Pour $x \in [0;3]$ on peut calculer $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(9)'(6-x) - 9(6-x)'}{(6-x)^2} = \frac{9}{(6-x)^2}$$

Pour tout $x \in [0;3]$, on a $(6-x)^2 > 0$ et du coup $\dfrac{9}{(6-x)^2} > 0$, nous en déduisons que la fonction f est strictement croissante sur $[0;3]$.

(b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a :$0 < v_n < v_{n+1} < 3$.

Solution

Notons $\mathscr{P}(n) : 0 \leq v_n < v_{n+1} < 3$

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
Il s'agit de vérifier que $0 < v_0 < v_1 < 5$
Or, $v_0 = 1$ et $v_1 = \dfrac{9}{6-1} = \dfrac{9}{5} = 1,8$ et on a bien vérifié $\mathscr{P}$ pour $n = 0$.
Ainsi $\mathscr{P}$ est initialisée.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $0 \leq v_n < v_{n+1} < 3$ alors $0 < v_{n+1} < v_{n+2} < 3$
De $0 < v_n < v_{n+1} < 3$ et parce que f est une strictement croissante sur l'intervalle $[0;3]$ on obtient :

$$f(0) < f(v_n) < f(v_{n+1}) < f(3)$$

Or, $f(0) = \dfrac{9}{6-0} = 1,5$ et $f(3) = \dfrac{9}{6-3} = 3$ d'où :

$$0 < 1,5 < v_{n+1} < v_{n+2} < 3$$

donc $\mathscr{P}$ est héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc on a établit la véracité de $\mathscr{P}$ pour tout entier naturel n.

(c) Que peut-on en déduire ?

Solution

D'après la question précédente (v_n) est une suite croissante et majorée par 3 donc par le théorème de convergence monotone on en déduit que la suite est convergente vers un réel ℓ inférieur ou égal à 3.

2. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Solution

Pour les mêmes raisons que celle de l'exercice précédent, la limite ℓ de la suite (v_n) vérifie :

$$\ell = \frac{9}{6-\ell} \Longleftrightarrow \ell(6-\ell) = 9 \Longleftrightarrow 6\ell - \ell^2 - 9 = 0 \Longleftrightarrow \ell^2 - 6\ell + 9 = 0 \Longleftrightarrow (\ell-3)^2 = 0 \Longleftrightarrow \ell - 3 = 0 \Longleftrightarrow \ell = 3$$

Exercice 4. **(10 points)**

PARTIE A.

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à N − 1

Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$
Fin pour

Sortie
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 3 ?

Remplissons un tableau donnant l'évolution des variables :

N	3			
u	0	$3\times0-2\times0+3=3$	$3\times3-2\times1+3=10$	$3\times10-2\times2+3=29$
k	0	1	2	3

PARTIE B.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = 3u_0 - 2\times0 + 3 = 3\times0 - 0 + 3 = 3$$

$$u_2 = 3u_1 - 2\times1 + 3 = 3\times3 - 2 + 3 = 10$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

Notons $\mathscr{P}(n) : u_n \geqslant n$.

Initialisation : pour $n = 0$:

$u_0 = 0$ et on a bien $u_0 \geq 0$

$\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Montrons que si $u_n \geqslant n$ alors $u_{n+1} \geqslant n+1$.

$$u_n \geq n \iff 3u_n \geq 3n \iff 3u_n - 2n \geq 3n - 2n \iff 3u_n - 2n + 3 \geq n + 3$$

De plus puisque $n+3 > n+1$ on obtient :

$$3u_n - 2n + 3 \geq n + 1 \iff u_{n+1} \geq n + 1$$

Nous venons de démontrer que $\mathscr{P}$ est héréditaire.
Conclusion : $\mathscr{P}$ est héréditaire et vraie à partir de $n = 0$ il suit que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n \geq n$$

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, alors puisque $u_n \geq n$ il suit par comparaison que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2(u_n - n) + 3$$

Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3$$

(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

D'après une question précédente $u_n \geq n$ donc $u_n - n \geq 0$ donc $2(u_n - n) \geq 0$ et donc $2(u_n - n) + 3 \geq 0$, par conséquent $u_{n+1} - u_n \geq 0 \iff u_{n+1} \geq u_n$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout entier naturel n on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = u_{n+1} - n - 1 + 1 = u_{n+1} - n = 3u_n - 2n + 3 - n = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$$

Puisque $v_{n+1} = 3v_n$, (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

Puisque $v_n = u_n - n + 1$ il suit que $v_n + n - 1 = u_n$.
Puisque (v_n) est géométrique de raison 3 il suit que pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$ et donc :

$$3^n + n - 1 = u_n$$

5. Soit p un entier naturel non nul.

(a) Pourquoi est-on sûr qu'il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \text{on ait} \quad u_n \geqslant 10^p \quad ?$$

Puisque d'après une question de début d'exercice $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors quelque soit le réel A (en particulier pour $A = 10^p$ il existe un rang n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq A = 10^p$.

(b) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $u_n \geqslant 10^3$.

$u_6 = 3^6 + 6 - 1 = 3^6 + 5 = 9 \times 9 \times 9 + 5 = 81 \times 9 + 5 = 810 - 81 + 5 = 810 - 100 + 19 + 5 = 710 + 24 = 734 < 1000.$
puis $u_7 = 3^7 + 7 - 1 = 729 \times 3 + 6 = 2190 - 3 + 6 = 2193 > 1000$
De plus puisque (u_n) est croissante alors pour tout entier naturel $n \geq 7$ on a $u_n \geq u_7 \geq 1000$. Et puisque $u_6 < 1000$, il suit que $n_0 = 7$ est le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on ait $u_n \geq 1000$.

(c) Compléter l'algorithme, donnée en annexe, qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Variables
U est un réel.
n et p sont des entiers naturels.
Entrée
Saisir le nombre entier naturel p.

Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à n la valeur 0
Tant que U $< 10^p$

Affecter à U la valeur $3^n + n - 1$
Affecter à n la valeur $n + 1$

Fin tantque

Sortie
Afficher n