CORRECTION DEVOIR MAISON 6
LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$, démontrer que j est solution de l'équation :

$$1+j+j^2=0$$

Solution

$$j = 1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De plus cherchons les racines du trinôme z^2+z+1 de discriminant $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, le trinôme dont il est question admet deux racines complexes et conjuguées qui sont :

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j \qquad \text{et} \qquad \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Nous avons bien démontré que j est solution de l'équation $1+j+j^2=0$.

Exercice 2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(\text{O};\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right)z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$.

Solution

$$\left|\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right| = \sqrt{9/16+3/16} = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

Un argument, disons θ de ce nombre complexe, vérifie $\cos\theta = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{2\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}$ donc :

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

De sorte que la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}$ est :

$$\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution

P our tout entier naturel n on a :

$$r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right)z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\text{i}\right)\right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times r_n$$

D. Zancanaro
zancanaro.math@gmail.com

Nous venons de démontrer que (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

Solution

Puisque la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ on a :

$$r_n = r_0 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = |z_0| \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = |1| \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

(c) Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Solution

$OA_n = |z_n| = r_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$, or $-1 < \dfrac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ ainsi la longueur OA_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P

Traitement	R prend la valeur 1
	n prend la valeur 0
	Tant que R > P
	    n prend la valeur $n+1$
	    R prend la valeur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$R
	Fin tant que

Sortie	Afficher n

(a) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour P = 0,5 ?

Solution

Complétons un tableau résumant l'évolution des variables :

n	0	1	2	3	4	5
R	1	0.87	0.75	0.65	0.56	0.49
Condition	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Vraie	Faux

L'algorithme affiche la valeur 5.

(b) Pour P = 0,01 on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Solution

C et algorithme affiche la valeur du plus petit entier naturel vérifiant $r_n \leq$ P.

4. (a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Solution

$$\mathrm{OA}_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

$$\mathrm{OA}_{n+1} = |z_{n+1}| = r_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$$

$$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left|\left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n - z_n\right| = \left|\left(-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n\right| = \left|-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| r_n = \sqrt{1/16+3/16}\,r_n = \frac{1}{2} r_n = \frac{\sqrt{3}^n}{2^{n+1}}$$

$$\mathrm{OA}_n^2 = \frac{\sqrt{3}^{2n}}{2^{2n}}$$

$$\mathrm{OA}_{n+1}^2 + \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}^2 = \frac{\sqrt{3}^{2n+2}}{2^{2n+2}} + \frac{\sqrt{3}^{2n}}{2^{2n+2}} = \frac{\sqrt{3}^{2n}(3+1)}{4\times 2^n} = \frac{\sqrt{3}^{2n}}{2^{2n}} = \mathrm{OA}_n^2$$

ainsi nous venons de démontrer, en utilisant Pythagore que $\mathrm{OA}_n\mathrm{A}_{n+1}$ est un triangle rectangle en A_{n+1}.

(b) On admet que $z_n = r_n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right)$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

Solution

A_n est un point de l'axe des ordonnées si et seulement si l'argument de son affixe vaut $\frac{pi}{2}$ à π près autrement dit si et seulement si :

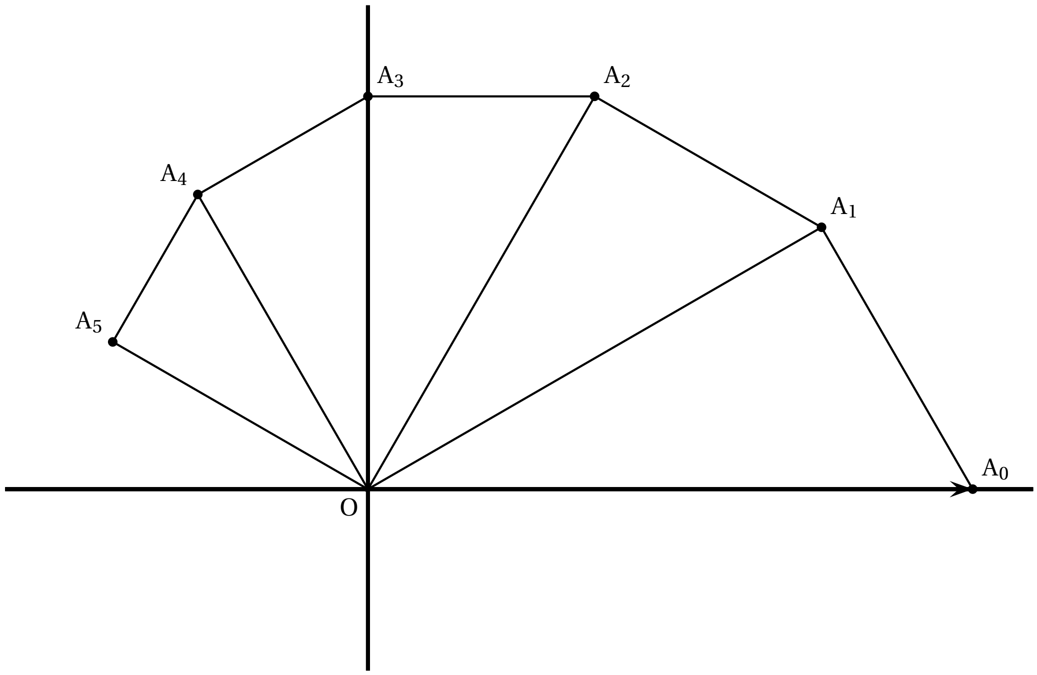
$$n\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Longleftrightarrow n = 3+6k$$

où k désigne un entier relatif.

(c) Compléter la figure ci-dessous, en représentant les points $\mathrm{A}_6, \mathrm{A}_7, \mathrm{A}_8$ et A_9.
Les traits de construction seront apparents.

Solution

O n laisse au soin du lecteur cette construction.



A_3
A_2
A_4
A_1
A_5
A_0
O