∽ Correction du Devoir Maison 2 ∾
Suites

Remarque : *L'élève pourra traiter, au choix, le premier exercice ou les deux derniers.*

Exercice 1.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$u_n \leqslant n+3.$$
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$
   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
   $$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n}{n^2}.$$
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

Solution

1. (a) On calcule les premiers termes, par exemple en utilisant le mode récurrence de la calculatrice, et on obtient :
   $u_1 = 2 + \frac{1}{3} \approx 2,33$ $\quad$ $u_2 = 2 + \frac{8}{9} \approx 2,89$
   $u_3 = 3 + \frac{16}{27} \approx 3,59$ $\quad$ $u_4 = 4 + \frac{32}{81} \approx 4,40$
   (b) On peut donc émettre la conjecture que la suite est croissante. On pourra en tout cas affirmer qu'elle n'est pas décroissante.
2. (a) Nous allons procéder par récurrence :
   Identification de la propriété : Pour tout entier naturel n, posons la propriété $\mathscr{P}_n$ suivante : $u_n \leqslant n+3$.
   Initialisation : Puisque l'on a $u_0 = 2$ et $0+3=3$, on vérifie bien :
   $u_0 \leqslant 0+3$: *la propriété $\mathscr{P}_0$ est bien vraie.*
   Hérédité : Pour k entier naturel quelconque, on suppose la propriété $\mathscr{P}_k$ vraie.
   On a $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1$.
   Par hypothèse de récurrence : $u_k \leqslant k+3$
   En multipliant par un nombre positif : $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}(k+3)$
   Soit $\frac{2}{3}u_k \leqslant \frac{2}{3}k + 2$

Puis, en ajoutant un même nombre dans chaque membre :
$\frac{2}{3}u_k + \frac{1}{3}k + 1 \leqslant \frac{2}{3}k + 2 + \frac{1}{3}k + 1$
Ce qui donne : $u_{k+1} \leqslant k+3 \leqslant k+4$
On a donc $u_{k+1} \leqslant (k+1)+3$, c'est à dire que la propriété $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.
Nous avons donc démontré le caractère héréditaire de la véracité des propriétés $\mathscr{P}_n$.
Conclusion : Puisque la propriété $\mathscr{P}_0$ est vraie et que nous avons prouvé l'hérédité, on peut en déduire, par le principe de récurrence que pour tout entier naturel n, on a $\mathscr{P}_n$ vraie, c'est à dire que pour tout entier naturel n, on a bien $u_n \leqslant n+3$.

(b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{3}{3}$

On a donc bien $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} \times (-u_n + n + 3) = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$. Comme on l'a montré à la question précédente, pour tout n naturel, on a $u_n \leqslant n+3$ ce qui équivaut à dire que la différence $n+3-u_n$ est positive, et elle le reste en étant multipliée par $\frac{1}{3}$, donc la différence entre deux termes consécutifs étant positive, on confirme bien que notre conjecture était correcte : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante, dès le rang 0.

3. (a) Exprimons, pour un entier n naturel quelconque, v_{n+1} en fonction de v_n :
$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n)$
Donc $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$.

La relation de récurrence obtenue confirme que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

(b) On peut donc en déduire une expression explicite du terme général de la suite v : $v_n = v_0 \times q^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Enfin, puisque l'on a, pour tout n, $v_n = u_n - n$, on en déduit :
$u_n = v_n + n$, et donc on aboutit bien à l'expression demandée :
$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

(c) Puisque la raison q est strictement comprise entre -1 et 1, on en déduit que la limite de la suite v est 0, et donc par limite d'une somme de suites, la limite de la suite u est donc $+\infty$, et la suite u est donc divergente.

4. (a) S_n est la somme de $n+1$ termes de la suite u_n. Mais, comme par ailleurs, on peut considérer que chaque terme u_n est la somme de v_n et de n, donc en réordonnant les termes, S_n est la somme de deux « sous-sommes » : celle des $n+1$ premiers termes de la suite v et celle des $n+1$ premier entiers naturels.
La première sous-somme est une somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique, et vaut donc :

$$v_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)} = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

La seconde sous-somme est la somme des $n+1$ premiers entiers naturels, c'est à dire la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 1, donc elle vaut :
$\frac{0+n}{2} \times (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}$ (résultat classique).

Finalement, on a $\mathrm{S}_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) On en déduit : $\mathrm{T}_n = \dfrac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$

$$\mathrm{T}_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$\mathrm{T}_n = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Puisque, une fois encore, q est entre -1 et 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}=0$.

Donc par limite d'une somme de suites, puis d'un produit de suites : $\lim\limits_{n\to+\infty} 6\times\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)=6$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$, donc par limite d'un quotient de suites, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{6\times\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}{n^2}=0$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2n}=0$, et donc finalement, par limite d'une somme de suites, on arrive à conclure que la suite T converge vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

1. On pose, pour tout entier n :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

Solution

O n a pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3}$$

de plus on sait que $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$, de sorte que :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4}}{\frac{2u_n + 3 + 3u_n + 12}{u_n + 4}} = \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{1}{5} \times v_n$$

On vient de démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

2. Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

Solution

$v_0 = \dfrac{0 - 1}{0 + 3} = -\dfrac{1}{3}$, par conséquent puisque la suite (v_n) est géométrique on a :

$$v_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

De plus :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \Longleftrightarrow v_n(u_n + 3) = u_n - 1 \Longleftrightarrow v_n u_n - u_n = -3v_n - 1 \Longleftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3v_n - 1 \Longleftrightarrow u_n = \frac{-3v_n - 1}{v_n - 1}$$

et donc :

$$u_n = \frac{0,2^n - 1}{-\frac{1}{3} \times 0,2^n - 1}$$

3. Déterminer la limite de (v_n), puis celle de (u_n) en fonction de n.

Solution

P uisque $-1 < 0,2 < 1$ il suit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

De plus puisque $u_n = \dfrac{-3v_n - 1}{v_n - 1}$ et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$$

Exercice 3. O n pose $u_1 = 0,2$; $u_2 = 0,23$; $u_3 = 0,235$; … ; $u_7 = 0,2357111317$; …

(u_n s'écrit 0 virgule, suivi de la juxtaposition des n premiers nombres premiers.)

1. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

Solution

La suite (u_n) est trivialement croissante.

2. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

   Note : La limite de cette suite est appelée « nombre d'Erdos »

Solution

L a suite (u_n) est trivialement majorée par 1, de sorte qu'elle est strictement croissante et majorée par 1 donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un nombre réel inférieur ou égal à 1.