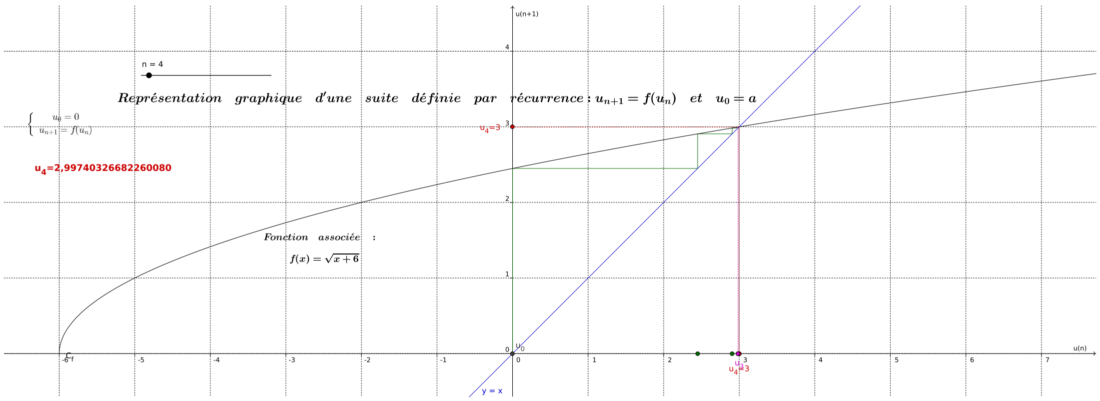
∽ Correction du Devoir Maison 1 ∾
Suites

Exercice 1.

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$.

1. Dans un repère orthonormal on représenté la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie pour $x \geq -6$ par $f(x) = \sqrt{x+6}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$. Représenter les termes u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4 en utilisant $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$.



Conjecturer, à l'aide du « dessin » précédent le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

Solution

On observe que $u_0 < u_1 < u_2 < u_3 < u_4$, par conséquent on peut penser que la suite (u_n) soit strictement croissante, de plus on observe graphiquement que les termes s'agglutinent autour de l'abscisse du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$, ce qui nous pousse à croire que (u_n) converge vers 3.

2. Démontrer, par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$$

Solution

N otons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ que nous allons prouver par récurrence sur n.

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
$u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{0+6} = \sqrt{6}$ et on a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$, ainsi $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.

— ***Hérédité*** : Montrons que si $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

$$\begin{aligned} & 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3 \\ \Longleftrightarrow & 6 \leq u_n + 6 \leq u_{n+1} + 6 \leq 9 \\ \Longleftrightarrow & \sqrt{6} \leq \sqrt{u_n + 6} \leq \sqrt{u_{n+1} + 6} \leq 3 \\ \Longrightarrow & 0 (< \sqrt{6}) \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3 \end{aligned}$$

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est héréditaire et est initialisée à partir de $n = 0$, de sorte que nous avons démontré par récurrence que la suite (u_n) était croissante et majorée par 3.

3. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Solution

D 'après la question précédente $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout entier naturel n donc la suite est croissante.

4. Résoudre l'équation $x = \sqrt{x+6}$.

Solution

P uisque $x = \sqrt{\ldots}$ on doit avoir $x \geq 0$, d'autre part :

$$x = \sqrt{x+6} \Longrightarrow x^2 = x+6 \Longrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 5$, de sorte que le trinôme admet deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1+5}{2} = 3$.

Parmi ces deux solutions hypothétiques, seule 3 est solution de l'équation initiale (puisque x doit être positif ou nul).

5. En vous aidant du graphique, expliquer pourquoi résoudre l'équation précédente a un lien avec la limite de la suite (u_n).

Solution

D 'après la question précédente, l'abscisse du point d'intersection entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ est 3, qui est donc un candidat idéal dans l'hypothèse où notre suite (u_n) converge.

Exercice 2. On considère la suite de terme général :

$$u_n = 2^n - n$$

1. Calculer u_0 ; u_1 ; u_2 ; ... ; u_9 puis conjecturer d'une part le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite.

Solution

$u_0 = 1$, $u_1 = 2-1 = 1$, $u_2 = 4-2 = 2$, $u_3 = 8-3 = 5$, $u_4 = 12$, $u_5 = 27$, $u_6 = 58$, $u_7 = 121$, $u_8 = 248$ et $u_9 = 503$.

Il semble que la suite (u_n) soit croissante et diverge vers $+\infty$.

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$$

Solution

Pour tout entier naturel n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - (2^n - n) = 2 \times 2^n - n - 1 - 2^n + n = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1$$

(b) Démontrer, par récurrence que $2^n - 1 \geq 0$ pour tout entier naturel n.

On pourra observer que $2^{n+1} - 1 = 2 \times \left(2^n - 1\right) + 1$

Solution

N otons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $2^n - 1 \geq 0$ et prouvons la par récurrence.

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$.
$2^0 - 1 = 0 \geq 0$ donc $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 0$

— ***Hérédité*** : Montrons que si $2^n - 1 \geq 0$ alors $2^{n+1} - 1 \geq 0$
On suppose que $2^n - 1 \geq 0 \Longleftrightarrow 2^n \geq 1$
De plus

$$2^{n+1} - 1 = 2 \times 2^n - 1 \geq 2 \times 1 - 1 = 1 > 0$$

Ainsi $\mathscr{P}$ est héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 0$ et est héréditaire donc on a démontré par récurrence que pour tout entier naturel n on a :

$$2^n - 1 \geq 0$$

(c) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Solution

D 'après l'avant dernière question on sait que $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$ et d'après la précédente on sait que $2^n - 1 \geq 0$, par conséquent $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.

3. (a) Démontrer par récurrence que $u_n \geq 1,5^n$ pour $n \geq 3$.

Solution

N otons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $u_n \geq 1,5^n$ et prouvons la par récurrence.

— ***Initialisation*** : Montrons que $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 3$.
$u_3 = 2^3 - 3 = 5 \geq 1,5^3 = \dfrac{27}{8}$ donc $\mathscr{P}$ est vraie pour $n = 3$

— ***Hérédité*** : Montrons que si $u_n \geq 1,5^n$ alors $u_n \geq 1,5^{n+1}$
On sait que $u_n = 2^n - n$ et on suppose que $u_n \geq 1,5^n$, de sorte que $2^n - n \geq 1,5^n \iff 2^n \geq 1,5^n + n$.
De plus

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1) = 2 \times 2^n - n - 1 \geq 2 \times (1,5^n + n) - n - 1 > 1,5^{n+1} + 2n - n - 1 > 1,5^{n+1}$$

Ainsi $\mathscr{P}$ est héréditaire.

— ***Conclusion*** : $\mathscr{P}$ est initialisée à partir de $n = 3$ et est héréditaire donc on a démontré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a :

$$u_n \geq 1,5^n$$

(b) Donner

$$\lim_{n \to +\infty} 1,5^n$$

Solution

P uisque $1,5 > 1$ on sait que :

$$\lim_{n \to +\infty} 1,5^n = +\infty$$

(c) Que peut-on en déduire quant à la limite de la suite (u_n) ?

Solution

D 'après l'avant dernière question on sait que $u_n \geq 1,5^n$ dès que $n \geq 3$ et d'après la précédente on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,5^n = +\infty$, on en déduit par comparaison que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$