∽ Devoir Surveillé 1 ∽
Les suites

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction et de l'application.

Exercice 1. **2 points**

Déterminer la limite de la suite w_n définie pour tout entier naturel n par :

$$w_n = \frac{n^2}{n^2+1} + 1$$

Exercice 2. **4 points**

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente.
Il achète 10000 nouvelles abeilles chaque année.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
Pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,8u_n + 1.$$

1. Résoudre l'équation $x = 0,8x + 1$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n on a :
$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 5$$
3. En déduire que la suite converge.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter votre résultat.

Exercice 3. **4 points**

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$$

1. (a) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;3]$ par $f(x) = \dfrac{9}{6-x}$. Etudier ses variations sur l'intervalle $[0;3]$.
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a :$0 < v_n < v_{n+1} < 3$.
   (c) Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 4. **10 points**

PARTIE A.

On considère l'algorithme suivant :
Les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul N.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Pour k allant de 0 à $\mathrm{N}-1$
Affecter à U la valeur $3\mathrm{U} - 2k + 3$
Fin pour
Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque $\mathrm{N} = 3$?

PARTIE B.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Vérifier que $u_1 = 3$ puis calculer u_2 et u_3.
2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n on a :
   $$u_{n+1} - u_n = 2(u_n - n) + 3$$
   (b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.
5. Soit p un entier naturel non nul.
   (a) Pourquoi est-on sûr qu'il existe un entier n_0 tel que :
   $$\forall n \geqslant n_0 \quad \text{on ait} \qquad u_n \geqslant 10^p \quad ?$$
   (b) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$ on ait $u_n \geqslant 10^3$.
   (c) Compléter l'algorithme, donnée en annexe, qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Variables U est un réel, n et p sont des entiers naturels. **Entrée** Saisir le nombre entier naturel p. **Traitement** Affecter à U la valeur 0 puis affecter à n la valeur 0 Tant que .... Affecter à U la valeur .... Affecter à n la valeur .... Fin tantque Afficher ...