∾ DEVOIR MAISON 5 ∾
LES NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives :

$$a = 3 - \mathrm{i}, \quad b = 1 - 3\mathrm{i} \text{ et } c = -1 - \mathrm{i}.$$

1. (a) Placer ces points sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.
   (b) Quelle est la nature du triangle ABC ?
   (c) Démontrer que les points A et B appartiennent à un même cercle Γ de centre O, dont on calculera le rayon.
2. Soit M un point quelconque du plan d'affixe notée m et N le point d'affixe notée n, définit par $n = 1 + 3i + (1 - i)m$.
   (a) Calculer les distances AM, AN et MN.
   (b) En déduire la nature du triangle AMN.
3. On appelle Q le milieu du segment [AN] et q son affixe.
   Montrer que : $q = \dfrac{(1-\mathrm{i})m}{2} + 2 + \mathrm{i}$.

Exercice 2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$. À tout point M d'affixe z, on associe le point M′ d'affixe

$$z' = -z^2 + 2z.$$

Le point M′ est appelé image du point M.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
   $$-z^2 + 2z - 2 = 0.$$
   En déduire les affixes des points dont l'image est le point d'affixe 2.
2. Soit M un point d'affixe z et M′ son image d'affixe z'.
   On note N le point d'affixe $z_N = z^2$.
   Montrer que M est le milieu du segment [NM′].
3. Dans cette question, on suppose que le point M ayant pour affixe z, appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1. On note θ un argument de z.
   (a) Déterminer le module de chacun des nombres complexes z et z_N, ainsi qu'un argument de z_N en fonction de θ.
   (b) Sur une figure puis construire les points N et M′ en utilisant une règle et un compas (on laissera les traits de construction apparents).
   (c) Soit A le point d'affixe 1. Quelle est la nature du triangle AMM′ ?