

## ∞ DEVOIR MAISON 2 ∞ SUITES

**Remarque :** L'élève pourra traiter, au choix, le premier exercice ou les deux derniers.

### Exercice 1.

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbf{N}$  par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ . On pourra en donner des valeurs approchées à  $10^{-2}$  près.  
(b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n \leq n + 3.$$

- (b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n).$$

- (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbf{N}$  par  $v_n = u_n - n$ .

- (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ .
- (b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

- (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .
4. Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

- (a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
- (b) Déterminer la limite de la suite  $(T_n)$ .

### Exercice 2.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$$

1. On pose, pour tout entier  $n$  :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$$

- Montrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.
2. Exprimer  $v_n$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  3. Déterminer la limite de  $(v_n)$ , puis celle de  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .

### Exercice 3. On pose $u_1 = 0,2$ ; $u_2 = 0,23$ ; $u_3 = 0,235$ ; ... ; $u_7 = 0,2357111317$ ; ...

( $u_n$  s'écrit 0 virgule, suivi de la juxtaposition des  $n$  premiers nombres premiers.)

1. Quel est le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
2. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Note :** La limite de cette suite est appelée « nombre d'Erdos »