Exercices
La suite des Suites !

Exercice 1 :

Partie A : On considère l'algorithme ci-contre.
Faire fonctionner l'algorithme pour $p = 3$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape dans un tableau.

Quel nombre obtient-on en sortie ?

Algorithme 1 :

Variable(s)
k et p sont des entiers naturels
u est un réel
Début
Entrée(s) : Demander la valeur de p
Traitement
Affecter à u la valeur 5
Pour k allant de 1 à p **Faire**
Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
Fin Pour
Sortie(s) : Afficher u
Fin

Partie B : Soit (u_n) la suite définie par son premer terme $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0.5u_n + 0.5n - 1.5$$

1. Modifier l'algorithme de la partie A pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. A l'aide de l'algorithme modifié et après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

k		1	2	3	4	5
u	5	1	-0.5	-0.75	-0.375	

Donner tous les termes désormais connus de la suite (u_n)

3. Démontrer par récurrence que (u_n) est strictement croissante à partir de 3.
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0.1u_n - 0.1n + 0.5$
   a. Démontrer que (v_n) est géométrique de raison 0.5.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$
   c. En déduire alors celle de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$
   d. Calculer u_{100}

Exercice 2 : Amérique du Nord 2014

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1\,400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.
3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.
   Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Variables	:	n est un entier naturel
		a est un réel
Initialisation	:	Affecter à n la valeur 0
		Affecter à a la valeur 800
Traitement	:	Tant que $a < 1\,100$, faire :
		Affecter à a la valeur ...
		Affecter à n la valeur ...
		Fin Tant que
Sortie	:	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1\,320$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1\,320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.
   Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

Exercice 3 : Nouvelle Calédonie novembre 2015
On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\[2ex] a_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\frac{D}{2}+100$
	    A prend la valeur $\frac{A}{2}+\frac{D}{2}+70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n=1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. **a.** Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
$2^n \geqslant n^2$.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).

Exercice 4 : Asie juin 2016

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.
La société met en place le dispositif industriel suivant.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1\,000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. **a.** Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
   On précisera en particulier ce que représente u_n.

   b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
   Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres

Traitement	u prend la valeur 1 000
	n prend la valeur 0
	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ....
	    n prend la valeur $n+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher ....

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1\,000$.

   b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

   b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 : Soit e un réel strictement positif.

1. Résoudre dans $[0;+\infty[$ l'inéquation $\dfrac{3}{2x+1} < e$

2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3}{2n+1}$

   a. Démontrer que $u_n < e$ à partir d'un certain rang N.

   b. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 6 : Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = n^2 - n$.

1. Résoudre les inéquations suivantes : $v_n > 10^5$ et $v_n > 10^{10}$
2. Conjecturer la limite de la suite (v_n) puis la démontrer.

Exercice 7 : Soit les suites $(u_n)_{\mathbb{N}}$: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n} + 1$

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement à l'infini de la suite (u_n).
2. Prouver que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 8 : On considère deux suites u et v.

1. Déterminer la limite éventuelle des suites u, v et $u+v$ dans les cas suivants :

   a. $u_n = n^2 + n$ et $v_n = -n$

   b. $u_n = n+1$ et $v_n = -n^2 - n$

   c. $u_n = n+1$ et $v_n = -n+2$

   d. $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$

2. Proposer des termes généraux u_n et v_n tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ tels que

   a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$

   b. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 0$

   c. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = -\infty$

   d. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = 4$

Exercice 9 : On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3} \qquad \text{et} \qquad v_n = -(n+1)^2$$

1. **a.** Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

   b. On considère l'algorithme ci-contre. Quel est son intérêt ?

   c. A partir de quel rang N la distance entre u_n et ℓ est-elle strictement inférieure à $0,001$?

2. **a.** Déterminer la limite de la suite v.

   b. Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n < -10^{10}$.

Algorithme 2 :

Variable(s)
  u est un nombre réel.
  n est un entier naturel.
Début
  $n := 0$ et $u := \dfrac{1}{3}$.
  Tant que $(|u-2| \geq 0,001)$ **Faire**
    $n := n+1$
    $u := \dfrac{2n+1}{n+3}$
  Fin Tant que
  Renvoyer n
Fin

Exercice 10 : On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{5}{n+1} \qquad \text{et} \qquad v_n = n^2 - n$$

1. a. Montrer que la suite u converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.
   b. Compléter l'algorithme suivant de manière à ce qu'il affiche le plus petit entier naturel n tel que la distance entre u_n et ℓ soit inférieure à 10^{-5}.
2. a. Déterminer la limite de la suite v.
   b. Ecrire un algorithme (on pourra modifier le précédent) qui affiche le plus petit entier naturel n tel que $v_n > 10^{10}$.

Algorithme 3 :

Variable(s) :
u est un nombre réel.
n est un entier naturel.
Début
  $n := 0$ et $u := \ldots.$
  Tant que (...............) **Faire**
    ....   et
    ....
  Fin Tant que
  Renvoyer ...
Fin

Exercice 11 : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{n+1}{2n^3+1}$$

1. Etudier les variations de la suite (u_n).
2. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
3. On donne l'algorithme ci-contre.
   a. Que fait-il ?
   b. Programmer cet algorithme sur le logiciel de votre choix et déterminer les rangs N associés à $e = 10^{-2}$ puis $e = 10^{-5}$.

Algorithme 4 :

Entrée(s) : e est un nombre réel
Variable(s) :
n est un nombre entier
Début
  $n \leftarrow 0$
  Tant que $\left(\left|\frac{n+1}{2n^3+1}\right| \leq e\right)$ **Faire**
    $n \leftarrow n+1$
  Fin Tant que
  Renvoyer n.
Fin

Exercice 12 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0.5x^2 + x + 0.5$.

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = -0.5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et majorée par 1.
3. a. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$.
   b. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).
4. Pour tout réel $e > 0$, on souhaite déterminer le rang N à partir duquel la distance entre u_n et ℓ est inférieure à e.
   a. Construire un algorithme permettant de résoudre ce problème.
   b. Programmer, puis déterminer le premier rang N associé à $e = 10^{-5}$ puis à $e = 10^{-10}$

Exercice 13 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.
   a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Démontrer que la suite (u_n) converge.
3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.
   b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 14 :

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant n+3$
   b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(n+3-u_n)$
   c. En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
   $$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{S}_n}{n^2}.$$
   a. Exprimer S_n en fonction de n.
   b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 15 : Pondichéry Avril 2015

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Exercice 16 : On considère la suite numérique (v_n) définie $\forall n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3
Variables : v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n Pour i variant de 1 à n faire v prend la valeur 1 Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour **Fin algorithme**	**Variables :** v est un réel i et n sont des entiers naturels **Début de l'algorithme :** Lire n v prend la valeur 1 Pour i variant de 1 à n faire Afficher v v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$ Fin pour Afficher v **Fin algorithme**

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 17 :

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5

Traitement	Tant que $n < 9$
	    Affecter à u la valeur …
	    Affecter à n la valeur …
	Fin Tant que

Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.
2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?
3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	…	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…	0,0102	0,0101

   Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Etude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1+(0,5)^n}{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1+(1+0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 18 : Soient les suites u et v définies sur $\mathbb{N}$ par : ♠♠

$$u_n = 3n^3 - 4n + 2 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{2n+3}{-n-5}$$

1. a. Soit f la fonction qui à x associe $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$.
   Dériver f et en déduire son tableau de variations.

   b. En déduire que la suite u est croissante à partir du rang 1.

   c. Déterminer la limite de la suite u.

   d. Pour un réel A, on souhaite déterminer le rang à partir duquel

   $$u_n \geq \mathrm{A}$$

   Ecrire un algorithme permettant de résoudre ce problème sur votre copie.
   Le programmer (sur votre calculatrice ou Algobox ou autre), pour déterminer le rang à partir duquel

   $$u_n \geq 10^6$$

2. Déterminer la limite de la suite v.

Exercice 19 : Trouver une suite : ♠♠

1. non majorée mais qui ne tende pas vers $+\infty$.
2. croissante mais dont la limite n'est pas $+\infty$.
3. divergente vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante.
4. à termes strictement positifs et strictement décroissante mais qui ne converge pas vers 0.

Des illustrations graphiques de suites peuvent vous aider. D'ailleurs, à défaut de trouver trouver les suites demandées, vous pouvez joindre vos illustrations.