

EXERCICES
VOUS SAVIEZ DÉJÀ QUE LES MATHÉMATIQUES
ÉTAIENT COMPLEXES !

Exercice 1 : Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. La partie réelle de $2i - 3$ est -3 .
2. La partie imaginaire de $4 + 5i$ est $5i$.
3. Les entiers naturels sont des nombres complexes.
4. $(1 + i)^2$ est un imaginaire pur.

Exercice 2 : Dans chacun des cas suivants, déterminer les parties réelles et imaginaires du nombre z .

1. $z = (3 - i)^2$
2. $z = (2i - 1)(3 + i)$
3. $z = 3i(1 + i) - 5(2 - 3i)$

Exercice 3 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

1. $3z + 2 - i = z + 5 + 4i$
2. $(1 + i)z = 3 - 2i$
3. $-1 - z^2 = 0$

Exercice 4 :

Equation produit dans \mathbb{C}

1. Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x + iy$. Justifier que $0 \times z = 0$.
2. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 \times z_2 = 0$.
 - a. Démontrer que si $z_1 \neq 0$ alors $z_2 = 0$.
On pourra utiliser l'inverse de z .
 - b. Formuler la propriété ainsi démontrée.
3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation suivante : $(z^2 - 4)(z^2 + 4) = 0$

Exercice 5 : Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes. *On donnera les solutions sous forme algébrique.*

1. $(2 - i)z + 1 = (3 + 2i)z - i$
2. $z + 2i = iz - 1$
3. $(3 + 2i)(z - 1) = i$


Exercice 6 : Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. L'équation $z^2 - z - 2 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{C}
2. L'équation $z^4 - 1 = 0$ a quatre solutions dans \mathbb{C}
3. L'équation $z^4 - 1 = 0$ a quatre solutions dans \mathbb{R}
4. Pour tout nombre complexe z ,
 $2z^2 + 6z + 5 = (z + 1.5 - 0.5i)(2z + 3 + i)$


Exercice 7 : a, b et c sont des réels et a est différent de 0.

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.


1. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions distinctes dans \mathbb{C}
2. Si l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions z_1 et z_2 dans \mathbb{C} , alors $z_1 = \overline{z_2}$
3. Si l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a pour solutions z_1 et z_2 dans \mathbb{C} , alors $az^2 + bz + c = a(z + z_1)(z + z_2)$
4. Pour tout nombre complexe z , $2z^2 + 6z + 5 = (z + 1.5 - 0.5i)(2z + 3 + i)$

 **Exercice 8** : Si n est un entier naturel non nul, on dit que le nombre complexe z est une racine n -ième de l'unité si on a : $z^n = 1$

1. si $n = 3$.
 - a. Déterminer une racine évidente dans \mathbb{C} de l'équation $z^3 = 1$
 - b. Justifier que $z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1)$
 - c. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 = 1$
2. si $n = 4$.
 - a. Déterminer deux racines évidentes dans \mathbb{C} de l'équation $z^4 = 1$
 - b. Déterminer les réels a, b et c tels que $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(az^2 + bz + c)$
 - c. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^4 = 1$.

 **Exercice 9** : On pose $P(z) = z^3 - (6 + i)z^2 + \alpha z - 13i$, où α est un nombre complexe.

1. Calculer α pour que $P(i) = 0$.
2. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout complexe z , $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$
3. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $P(z) = 0$.

 **Exercice 10** : Résoudre dans \mathbb{C} les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} z + z' = 2 \\ zz' = 17 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} z + z' = 5 \\ zz' = 6.5 \end{cases}$$


 **Exercice 11** : On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

1. Démontrer que (E) a une solution imaginaire pure.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = (z + i)(z^2 + az + b)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans \mathbb{C} .

 **Exercice 12** : On définit la fonction polynôme f de \mathbb{C} dans \mathbb{C} par :

$$f(z) = z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 24z + 40$$

1. Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ a deux solutions imaginaires pures.
On pourra poser $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, puis mettre $f(iy)$ sous forme algébrique et enfin traduire la nullité de $f(iy)$ par un système.
2. Trouver deux réels a et b tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$f(z) = (z^2 + az + b)(z^2 + 4)$$

3. En déduire l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de l'équation $f(z) = 0$.