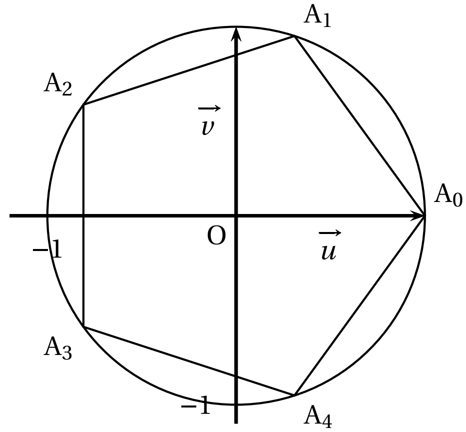
∽ Exercices ∽
Les fonctions sinus et cosinus

Exercice 1 : *L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.
On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k} ; \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points $B(-1,0)$ et $J\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe [BJ] en un point K.
Calculer BJ, puis en déduire BK.

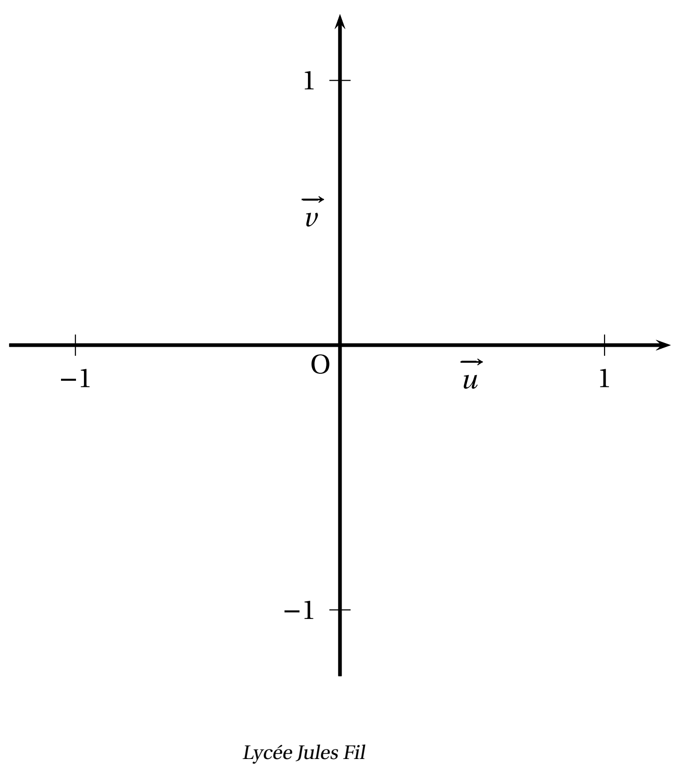
2. **a.** Donner sans calculer les coordonnées du point A_2.

b. Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-conre, que l'on pourra utiliser sans justification.
« sqrt » signifie « racine carrée »
En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

► Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\to \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\to \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

3. Dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ donné ci-dessous, construire à la règle et au compas un pentagone régulier.
N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.



Exercice 2 :

1. En remarquant que $\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$, calculer $\sin\dfrac{11\pi}{12}$
2. A l'aide des formules de duplication, calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$

Exercice 3 : Pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, on rappelle que l'on définit la fonction tangente par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction tan
2. Montrer que la fonction tan est $\pi-$périodique. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. Montrer que la fonction tan est impaire. Que peut-on en déduire graphiquement ?
4. Proposer alors un intervalle minimal I pour étudier la fonction tan.
5. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle I
6. Calculer $\tan(0)$ et $\tan\dfrac{\pi}{4}$.
7. Lorsque x se rapproche de $\dfrac{\pi}{2}$ comment évolue $\tan(x)$?
8. On admet que la fonction tan admet pour tangente en 0 la droite d'équation $y = x$.
   En utilisant les données précédentes, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction tan sur $]-2\pi;2\pi[$.

Exercice 4 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto x^2\cos(x) \qquad g : x \longmapsto (x^3+2x^2+1)\sin(x)$$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos(x)$.
Pour chacune des questions suivantes, entourer la bonne réponse sur le sujet, et **justifier** sur votre copie.

1. La dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) =$

   a. $\sin(x)$ **b.** $\cos(x)$ **c.** $\cos(x) + x\sin(x)$ **d.** $\cos(x) - x\sin(x)$

2. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-2\pi; 2\pi]$ est :

   a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

3. $f'\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) =$

   a. $\dfrac{5\pi}{12}$ **b.** $\dfrac{5\sqrt{2}\pi}{12}$ **c.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$ **d.** Autre valeur

4. Si x est aussi grand que l'on veut, alors $\big(f(x)\big)^2$

   a. est très proche de 0 **b.** est lui-même très grand **c.** on ne peut pas dire **d.** Autre réponse

5. Si x est aussi grand que l'on veut dans les négatifs, alors $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   a. est très proche de 0 **b.** est lui-même très grand (positif) **c.** on ne peut pas dire **d.** Autre réponse

6. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à :

   a. l'origine **b.** l'axe des ordonnées **c.** l'axe des abscisses **d.** la droite d'équation $y = x$

7. La fonction f est :

   a. paire **b.** impaire **c.** 2π- périodique **d.** Autre réponse

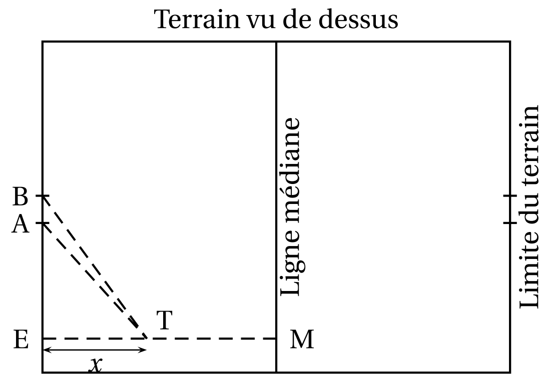
Exercice 6 : On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$
3. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en conclure ?
   b. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0; \pi]$.
4. A l'aide du cercle trigonométrique, étudier le signe de $1 + 2\cos x$ sur $[0; \pi]$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0; \pi]$ puis sur $[-\pi; 0]$ et enfin sur $[-3\pi; 3\pi]$.

Exercice 7 :

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB].

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. **a.** Justifier que la fonction tan est dérivable sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

   b. En déduire les variations de la fonction tan sur l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

   On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$,

   $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$.

   Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0\,;\,50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

   Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.