Chapitre 1

Les fonctions Sinus et Cosinus

Hors Sujet

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : C. Aupérin
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée Jules Fil (Carcassonne)

Titre : « M le maudit »
Auteur : Fritz Lang
Présentation succinte : Il s'agit du premier film parlant de Fritz Lang. Avec le temps, M le maudit est devenu un classique reconnu, rivalisant avec les autres œuvres de Lang pour le titre d'opus magnum. Pendant des années après la sortie du film, Peter Lorre est resté catalogué comme un méchant pour y avoir été un meurtrier d'enfant (et, c'est sous-entendu, un pédophile). M le maudit a été aussi un pionnier dans l'utilisation du leitmotiv (Dans l'antre du roi de la montagne, extrait de Peer Gynt d'Edvard Grieg) pour donner plus d'intensité à l'accompagnement musical.
La ville où se déroule l'action n'est pas nommée, et on pourrait croire qu'il s'agit de Düsseldorf, d'après les titres en italien et espagnol M, le monstre de Düsseldorf. Pourtant, Fritz Lang décide de faire se dérouler le film à Berlin. Plusieurs indices dans le film permettent au spectateur de comprendre qu'ils sont à Berlin : une publicité pour un journal berlinois, la carte de Berlin dans le bureau du commissaire, le fait que le commissaire parle d'une ville de 4 millions d'habitants...
Claude Beylie décrit « M » comme « [...] un magistral exercice de style, un modèle absolu de mise en scène, considérée comme une mise en équation de tous les éléments constitutifs du film. Le moindre détail est chargé de sens, les plans s'imbriquent selon un ordre infaillible. »

Table des matières

L'ESSENTIEL :

- ⇝ Rappeler le cercle trigonométrique
- ⇝ Découvrir de nouvelles formules
- ⇝ Découvrir deux nouvelles fonctions de référence
- ⇝ Revoir les fonctions dérivées et leurs applications

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

CHAPITRE 1: LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

Résumé

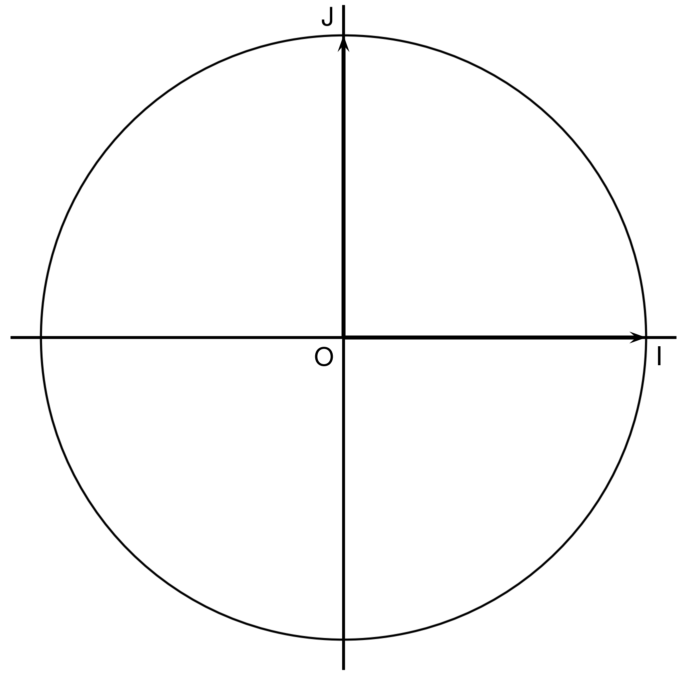
Vous avez manipulé les fonctions trigonométriques sans vous en rendre compte, il est temps de formaliser tout cela !
Ainsi ce chapitre reprend ce que vous connaissez déjà, mais avec le vocabulaire adpaté aux fonctions. De plus, vous allez apprendre à dériver les fonctions sinus et cosinus.

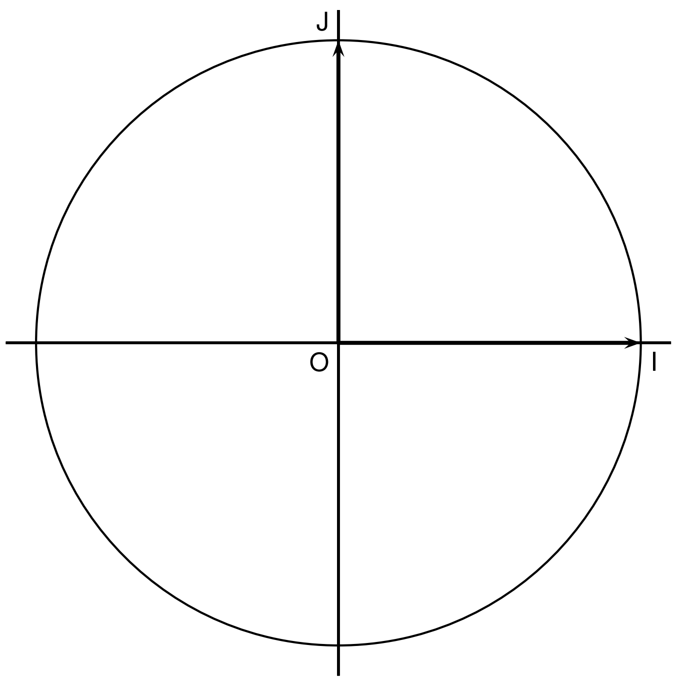
I) Rappels

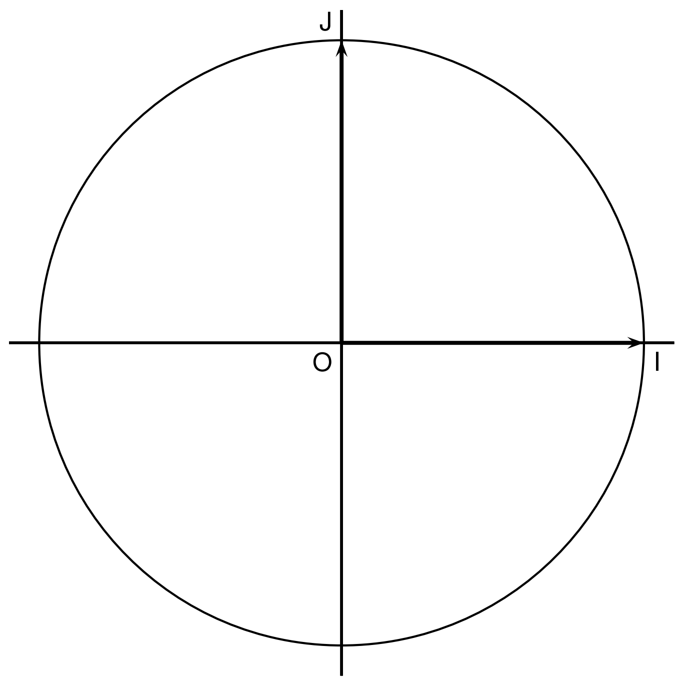
I.1. Angles remarquables

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$, on a tracé le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ (de centre O et de rayon 1, muni du sens direct).

1. Construire au compas sur le «premier» cercle $\mathscr{C}$ les points :
   - ⇝ A tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{3}$
   - ⇝ B tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)=-\frac{\pi}{3}$
   - ⇝ C tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\ldots$
   - ⇝ D tel que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)=\pi+\frac{\pi}{3}=\ldots$
2. Même question sur le «deuxième» cercle $\mathscr{C}$ en prenant $\frac{\pi}{4}$ comme angle de référence, puis $\frac{\pi}{6}$ sur le «troisième» cercle $\mathscr{C}$.
3. Sur chacun des cercles, déterminer les valeurs des abscisses et des ordonnées de chacun des points.







AP (Constructions à la règle et au compas, angles remarquables) :

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, placer à la règle et au compas les points suivants :

$$A\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad B(2;-\sqrt{3}) \qquad C\left(\frac{\sqrt{3}}{4};-1\right) \qquad D\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Propriété 1. (Rappels)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\cos(x + 2\pi \times k) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi \times k) = \sin(x) \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Valeurs remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n'existe pas	0

Configuration du rectangle

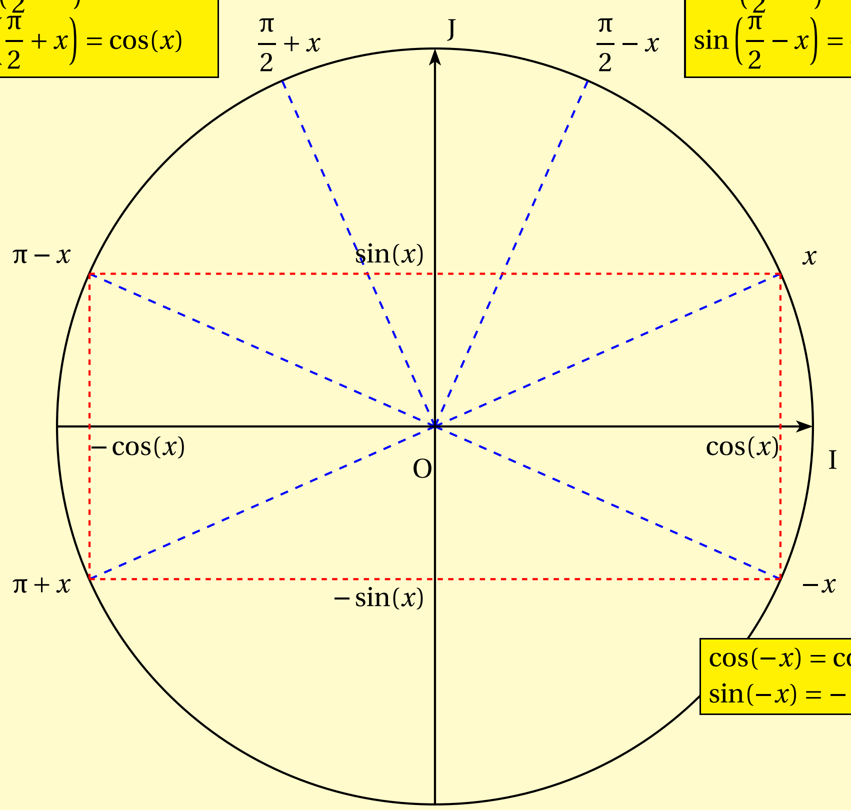
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$

$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

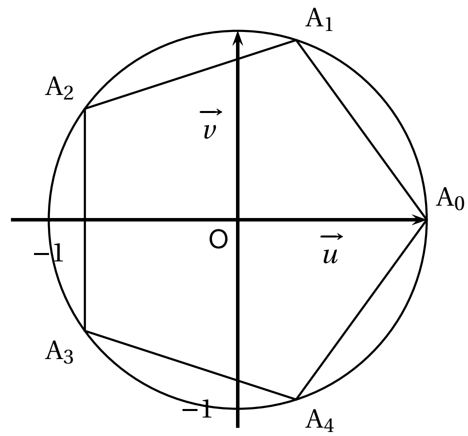
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$



Exercice 1 : *L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.*

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, on considère le pentagone régulier $\mathrm{A_0A_1A_2A_3A_4}$, de centre O tel que $\overrightarrow{\mathrm{OA_0}} = \vec{u}$.
On rappelle que dans le pentagone régulier $\mathrm{A_0A_1A_2A_3A_4}$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points $\mathrm{A_0}$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$ et $\mathrm{A_4}$ appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}_k}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{OA}_{k+1}}\right) = \dfrac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points $\mathrm{B}(-1,0)$ et $\mathrm{J}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\dfrac{1}{2}$ coupe [BJ] en un point K.
Calculer BJ, puis en déduire BK.

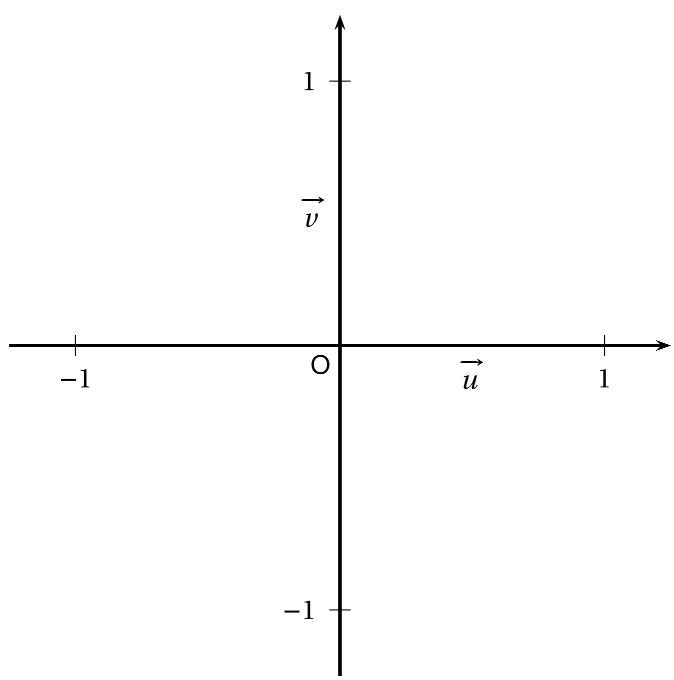
2. **a.** Donner sans calculer les coordonnées du point $\mathrm{A_2}$.

b. Démontrer que $\mathrm{BA_2}^2 = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$.

c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-conre, que l'on pourra utiliser sans justification.
« sqrt » signifie « racine carrée »
En déduire, grâce à ces résultats, que $\mathrm{BA_2} = \mathrm{BK}$.

► Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\to \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\to \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

3. Dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ donné ci-dessous, construire à la règle et au compas un pentagone régulier.
N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.



I.2. Linéarisation et duplication

Propriété 2.

Pour tous réels a et b on a : $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b}$ $(\star)$

On en déduit :

$$\begin{array}{|c|}\hline \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \hline \end{array}$$

Ainsi que les formules de duplication :

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}}$$

Preuve

Sous forme d'exercice

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ unitaires, tels que : $(\vec{i};\vec{u}) = a$ et $(\vec{i};\vec{v}) = b$

1. Démontrons tout d'abord $(\star)$.
   - **a.** Faire le schéma d'un cercle trigonométrique, muni d'un repère $(\mathrm{O};\vec{i};\vec{j})$, et dessiner deux représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ayant pour origine O, avec $a > b$.
   - **b.** Déterminer $(\vec{u};\vec{v})$ en fonction de a et b.
   - **c.** En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos(a-b)$.
   - **d.** Préciser les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction de a et b.
   - **e.** En déduire que $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
   - **f.** Conclure.
2. Grâce à la configuration du rectangle dans le cercle trigonométrique, retrouver les trois formules suivantes de la propriété ci-dessus.
3. Utiliser désormais $(\star)$ pour retrouver les formules de duplication.

Exemple :

- ⇝ Quelle relation connue obtient-on en prenant $b = a$ dans $(\star)$?
- ⇝ En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.
- ⇝ En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, retrouver les valeurs de $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$

Exercice 2 :

1. En remarquant que $\frac{11\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, calculer $\sin\frac{11\pi}{12}$
2. A l'aide des formules de duplication, calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

II) Les fonctions trigonométriques

II.1. Définition

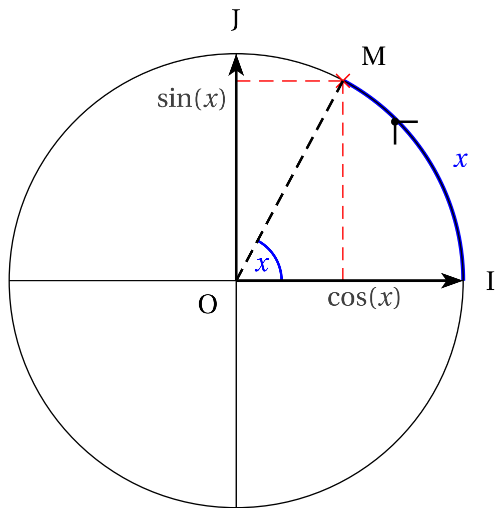
Travail de l'élève 1 : *On utilise le logiciel Géogébra. La figure peut être vidéo-projetée*

1. **Figure de base**
   - **a.** Ouvrir Géogébra et faire afficher le repère orthonormé $(O; I; J)$.
   - **b.** Choisir le radian comme unité d'angle dans "Options", "Configuration", "Avancé"
   - **c.** Tracer le cercle trigonométrique de centre O.
   - **d.** Créer un curseur t, variant entre -13 et 13 et d'incrémentation 0.05.
   - **e.** Dans la ligne de commande, saisir l'instruction suivante : $M = (1; t)$
     A votre avis, que signifie cette commande ? *Vous pouvez déplacer le curseur pour vous aider*
   - **f.** Dans la ligne de commande, saisir l'instruction $A = (x(M), 0)$
     A votre avis, que signifie cette commande ? *Vous pouvez déplacer le curseur pour vous aider*
   - **g.** Créer le point $B(0, y_M)$
2. **Variations**
   - **a.** Quelle est l'abscisse du point M dans le repère $(O; I; J)$? Son ordonnée ?
   - **b.** Avec le curseur, déplacer le point M.
     Décrire son trajet, ainsi que ceux de A et de B correspondants.
   - **c.** En déduire graphiquement les tableaux de variations des fonctions sinus et cosinus pour $t \in [-13; 13]$.
     On précisera de plus les valeurs où ces fonctions s'annulent.
3. **Courbes représentatives**
   - **a.** Compléter la figure précédente en créant le point $C(t, x_M)$.
   - **b.** Faire afficher sa trace. Quelle courbe représentative voit-on se dessiner ?
   - **c.** Faire de même pour le point $S(t, y_M)$. Quelle courbe représentative voit-on se dessiner ?
   - **d.** Vérifier la cohérence entre les courbes obtenues et vos tableaux.
4. **Propriétés**
   - **a.** Quelles propriétés constatez-vous pour les deux courbes ? Pouvez-vous la justifier ?
   - **b.** Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction cosinus ? Pouvez-vous la justifier ?
     Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?
   - **c.** Quelle symétrie observez-vous pour la courbe représentative de la fonction sinus ? Pouvez-vous la justifier ?
     Connaissez-vous d'autres fonctions de référence possédant cette propriété ?

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on peut associer à tout réel x un unique point M sur le cercle trigonométrique (orienté, de rayon 1 avec une origine).

Définition 1.

La fonction qui à tout réel x associe l'abscisse de son point associé M sur le cercle trigonométrique est la fonction **cosinus**, notée cos. Ainsi $x \longmapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1;1]$.
La fonction qui à tout réel x associe l'ordonnée de son point associé M sur le cercle trigonométrique est la fonction **sinus**, notée sin. Ainsi $x \longmapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-1;1]$.
La fonction qui à tout réel x, tel que $\cos x \neq 0$, associe le nombre $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est la fonction **tangente**, notée tan. Ainsi $x \longmapsto \tan(x)$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.



II.2. Vocabulaire et interprétation graphique

Définition 2. (Propriété)

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et T un nombre réel.
Lorsque pour tout $x \in D_f$ on a $f(x+T) = f(x)$, on dit que f est **périodique de période** T ou encore T−périodiques.
Ainsi, les fonctions cosinus, sinus et tangente sont 2π−**périodiques**.

Remarques :

- Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction périodique, de période T sur l'intervalle $[0;T]$ est la même que sur tout intervalle du type $[kT;(k+1)T]$, où $k\in\mathbb{Z}$.
- Grâce à cette propriété, il suffira d'étudier les fonctions cos et sin sur un intervalle de taille 2π de notre choix, par exemple $[0;2\pi[$ ou encore $]-\pi;\pi]$, et déduire le reste par translation.

Définition 3. (Propriété)

Soit f une fonction définie sur D_f symétrique par rapport à 0 (ie si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$ aussi).
Lorsque pour tout $x \in D_f$ on a :

- $\rightsquigarrow$ $f(-x) = f(x)$ on dit que f est une fonction **paire**.
- $\rightsquigarrow$ $f(-x) = -f(x)$ on dit que f est une fonction **impaire**.

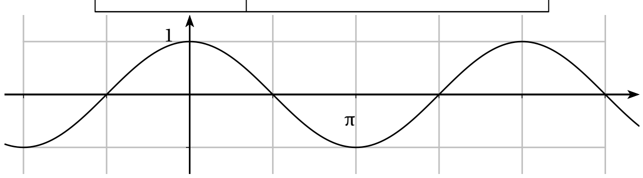
Ainsi la fonction **cos est paire**, tandis que les fonctions **sin** et **tan sont impaires**.

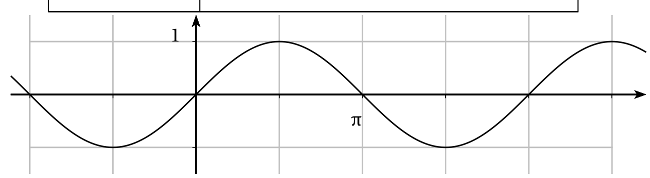
Remarques :

- $\rightsquigarrow$ Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- $\rightsquigarrow$ Grâce à cette propriété, on peut limiter l'étude des fonctions cos et sin à un intervalle de longueur π, par exemple $[0;\pi]$, et déduire le reste par symétrie.
- $\rightsquigarrow$ On rappelle que les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0 ↗	1 ↘	-1





Exercice 3 : Pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, on rappelle que l'on définit la fonction tangente par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction tan
2. Montrer que la fonction tan est $\pi-$périodique. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. Montrer que la fonction tan est impaire. Que peut-on en déduire graphiquement ?
4. Proposer alors un intervalle minimal I pour étudier la fonction tan.
5. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle I
6. Calculer $\tan(0)$ et $\tan\frac{\pi}{4}$.
7. Lorsque x se rapproche de $\frac{\pi}{2}$ comment évolue $\tan(x)$?
8. On admet que la fonction tan admet pour tangente en 0 la droite d'équation $y = x$.
   En utilisant les données précédentes, tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction tan sur $]-2\pi;2\pi[$.

AP (Programmation, parité) : Activité 3 p 93 (Déclic)

III) Dérivées

Théorème 1.

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc continues sur $\mathbb{R}$ aussi) et pour tout réel x on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

Preuve

On ne peut pas encore démontrer ces formules. Nous y reviendrons ultérieurement.

Remarque : On retrouve ainsi les tableaux de variations de ces fonctins, grâce au signe de leur dérivée

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x) = \sin(x)$	0	$+$	0
$\cos x$	1 ↘	0 ↘	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x) = \cos(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin x$	0 ↗		1	↘	-1

AP (rappel des formules sur les dérivées et équation de tangente) : A faire ...

Exercice 4 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto x^2\cos(x) \qquad\qquad g : x \longmapsto (x^3+2x^2+1)\sin(x)$$

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos(x)$.
Pour chacune des questions suivantes, entourer la bonne réponse sur le sujet, et **justifier** sur votre copie.

1. La dérivée f' de la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) =$

   a. $\sin(x)$ **b.** $\cos(x)$ **c.** $\cos(x) + x\sin(x)$ **d.** $\cos(x) - x\sin(x)$

2. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur $[-2\pi; 2\pi]$ est :

   a. 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

3. $f'\left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$

   a. $\frac{5\pi}{12}$ **b.** $\frac{5\sqrt{2}\pi}{12}$ **c.** $\frac{5\sqrt{3}}{12}$ **d.** Autre valeur

4. Si x est aussi grand que l'on veut, alors $\big(f(x)\big)^2$

   a. est très proche de 0 **b.** est lui-même très grand **c.** on ne peut pas dire **d.** Autre réponse

5. Si x est aussi grand que l'on veut dans les négatifs, alors $f\left(\frac{1}{x}\right)$

a. est très proche de 0 **b.** est lui-même très grand (positif) **c.** on ne peut pas dire **d.** Autre réponse

6. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à :

a. l'origine **b.** l'axe des ordonnées **c.** l'axe des abscisses **d.** la droite d'équation $y = x$

7. La fonction f est :

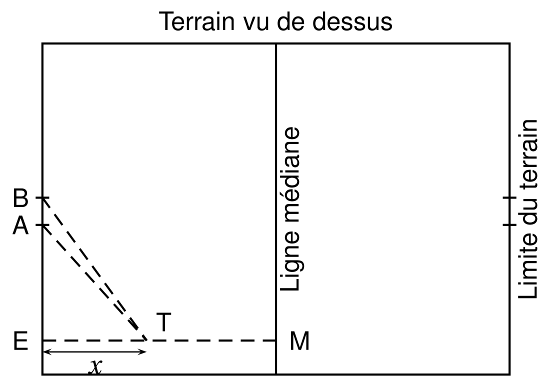
a. paire **b.** impaire **c.** 2π- périodique **d.** Autre réponse

Exercice 6 : On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. Justifier que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = \dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$
3. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en conclure ?
   b. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0;\pi]$.
4. A l'aide du cercle trigonométrique, étudier le signe de $1+2\cos x$ sur $[0;\pi]$.
5. En déduire le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0;\pi]$ puis sur $[-\pi;0]$ et enfin sur $[-3\pi;3\pi]$.

Exercice 7 :

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment [AB]. La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment [EM] perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E. La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment [EM] pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : EM = 50 m, EA = 25 m et AB = 5,6 m . On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

   La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

2. **a.** Justifier que la fonction tan est dérivable sur $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

b. En déduire les variations de la fonction tan sur l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure.

On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$,

$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \times \tan b}$.

Montrer que $\tan\gamma = \dfrac{5,6x}{x^2+765}$.

4. L'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle]0 ; 50] de la fonction f définie par : $f(x) = x + \dfrac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{\text{ATB}}$ à $0,01$ radian près.