Au fil du temps

Alors que les êtres humains se sont intéressés à la géométrie depuis la nuit des temps, et qu'une première présentation rigoureuse, ie **axiomatique**, en a été proposée trois siècles avant JC par le grec Euclide, il a fallu attendre le XVI^e siècle pour qu'on s'intéresse enfin aux probabilités, et encore était-ce pour aider les princes à améliorer leurs gains au jeu ...
Ainsi, la théorie des probabilités est jeune par rapport aux autres grandes disciplines mathématiques : elle prend réellement forme au XVII^e siècle, dans la correspondance entre Blaise Pascal, philosophe, théologien et mathématicien, et Pierre de Fermat, avocat et mathématicien « amateur » comme il se qualifiait lui-même, alors qu'il est l'une des grandes figures mathmétiques modernes (deux théorèmes d'arithmétiques portent son nom, dont l'un ne fut démontré qu'en 1994).
Si les probabilités ont attendu si longtemps avant de voir le jour, c'est peut-être à cause de l'étrangeté philosophique qu'elles véhiculent, à savoir l'idée qu'un événement du monde physique soit pensé non pas dans les termes « il se produit ou il ne se produit pas », mais « il peut se produire avec x% de chances »...
Si on dit qu'il y a 35,4% de chances qu'il pleuve demain à Carcassonne à 11h, cela signifie-t-il qu'il pleuvra réellement à Carcassonne mais seulement à 35,4% et qu'il fera en même temps soleil à 64,6% ? Cela semble un pur non sens ... Ou cela sigifie-t-il que la dynamique atmosphérique porte en elle une indétermination physique qui interdit de prévoir « à 100% » ? Ou enfin qu'il n'y a aucune indétermination physique mais que nous, êtres pensants, n'avons pas assez d'informations et de moyens de calculs pour prédire parfaitement son évolution ? En fait, ces trois façons d'interpréter un résultat de probabilité sont valables, chacune dans un certain domaine.
Ainsi, en mécanique quantique, une particule peut se trouver « ici à 35,4% et là-bas à 64,6% » tant qu'on n'a pas mesuré concrètement sa position (et non pas « ici ou là-bas » !). Les physiciens admettent qu'avant une mesure, une particule unique peut être en plusieurs lieux simultanément...
En ce qui concerne les deux autres interprétations, indétermination physique objective ou manque d'informations du physicien, le débat est ouvert depuis 1958, date à laquelle James Maxwell introduit les probabilités en physique. Pour lui, la température d'un gaz est liée aux probabilités de mouvement des milliards de particules qui le composent ... Très choquant pour les physiciens de l'époque : comment un phénomène aussi réel et objectif que la température d'un gaz peut-il dépendre d'un état de connaissance, c'est-à-dire d'une donnée subjective ? Pourtant, cette théorie est l'une des grandes réussites de la physique moderne ...
Ainsi, si la théorie mathématique des probabilités est aujourd'hui bien comprise et acceptée, dès qu'on cherche à en comprendre le sens physique, l'étonnement reprend le dessus et motive des générations de futurs chercheurs.

C'est en XVIII^e siècle que les statistiques endossent quant à elles leur premier grand rôle dans la vie moderne : celui d'un outil de prévision. Le mathématicien Antoine Deparcieu établit dans un livre le « profil » de la mortalité de populations à partir de données statistiques. En se servant des méthodes d'échantillonnage, de calculs de moyennes et d'écart-type, il crée les premières « tables de mortalité » permettant d'évaluer le risque moyen de mort d'un individu en fonction de son profil. Ce risque est alors directement transformé en pécule, rente versée à quelqu'un durant toute sa vie en contrepartie de l'acquisition de son bien à sa mort. Avec Deparcieu, la statistique fait son entrée dans le monde de l'économie.
Mais ce n'est qu'au XIX^e siècle que la statistique finit de prendre la place qu'est la sienne aujourd'hui : celle d'une science mathématique mais aussi humaine, omniprésente dans le débat publique. C'est Adolphe Quételet, astronome belge, qui intègre dans un ouvrage toutes les lois de probabilités développées depuis Pascal et Fermat : mesure des erreurs, loi binomiale que vous allez découvrir ici, etc.
Il tente d'établir des lois statistiques des suicides et des crimes en fonction de paramètres comme l'origine sociale, l'âge, le sexe, le climat, le niveau d'études, le revenu, etc. Mais Quételet se voit reprocher de faire de l'homme un être dont le comportement est prédéterminé par des lois mathématiques...
De plus, avec les statistiques sociales, une question se pose : sont-ce les statistiques qui déterminent nos comportements ou l'inverse ? Par exemple, si le taux de meurtriers dans la population est de 5% par an, cela signifie-t-il qu'il existe une sorte de loi qui nous dépasse et qui « oblige » 5% de personnes à se transformer en meutriers ?
Ce type de questionnement hantera tout le XX^e siècle et conduira à de tragiques dérapages où l'on voudra « neutraliser » dès le berceau tout homme né avec les « paramètres statistiques du crime »...

A-t-on besoin de savoir tout ça pour réussir au Bac ? Par exemple, depuis votre tendre enfance, vous calculez avec les nombres entiers sans connaître les axiomes de Peano, vous travaillez en géométrie euclidienne même si elle ne correspond pas à la réalité : avez-vous déjà rencontré un véritable triangle rectrangle ? Et pourtant vous arrivez quand même à démontrer le théorème de Pythagore.
Mais le débat est plus passionné au sujet des probabilités car il a fallu attendre 1933 et le Russe Kolmogorov pour enfin les axiomatiser, alors qu'Euclide avait fait cela pour la géométrie 2300 ans plus tôt...
C'est ce sujet encore brûlant que nous allons explorer cette année à travers quelques chapitres qui sauront, je n'en doute pas, vous passionner !

TI 82 à 84 :

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer un coefficient binomial $\binom{n}{k}$	`10 Combinaison 4` `210`	Ecrire n Appuyer sur **math** Dans `PRB` choisir `3:Combinaison` Ecrire k

Calculer
— $P(X = k)$
— $P(X \leq k)$
où $X \hookrightarrow B(n, p)$
	`binomFdp(10,.3,4)`
	`.200120949`
	`binomFRép(10,.3,4)`
	`.8497316674`
		Appuyer sur **2nde** + **var** pour obtenir **distrib**
		Puis choisir `0:binomFdp`
		ou `A:binomFRép`
		Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

TI 89 :

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre

Calculer un coefficient binomial $\binom{n}{k}$	`■ nbrComb(10,4)   210`
	`nbrComb(10,4)`
	`MAIN   RAD AUTO   FONC   1/30`
		Appuyer sur **2ND** + **5** pour obtenir **MATH**
		Dans `7:Probabilité`
		Choisir `3:nbrComb(` ou `3:nCr(`
		Compléter dans l'ordre les paramètres n et k.

Calculer
— $P(X = k)$
— $P(X \leq k)$
où $X \hookrightarrow B(n, p)$
	`■ tistat.binomddp(10,.3,4)`
	`.200121`
	`■ tistat.binomfdr(10,.3,4)`
	`.849732`
	`TIStat.binomFdR(10,0.3,4)`
	`MAIN   RAD AUTO   FONC   3/30`
		Dans **CATALOG** ouvrir l'onglet `F3 AppFlash`
		Appuyer sur **(** pour aller à la lettre B.
		Puis choisir `binomDdP(....TIStat`
		ou `binomFdR(....TIStat`
		Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

TI Nspire :

Objectif	Affichage voulu	Méthode à suivre
Calculer un coefficient binomial $\binom{n}{k}$	nCr(10,4) 210	Dans l'onglet $2:\int\sum$ du catalogue Ouvrir la catégorie `Probabilités.` Choisir `Nombre de combinaisons` Compléter dans l'ordre les paramètres n et k.
Calculer — $P(X = k)$ — $P(X \leq k)$ **où** $X \hookrightarrow B(n, p)$	binomPdf(10,0.3,4) 0.200121 binomCdf(10,0.3,0,4) 0.849732	Dans l'onglet $2:\int\sum$ du catalogue Ouvrir la catégorie `Probabilités.` Puis la sous-catégorie `Distributions` Puis choisir `Binomiale DdP` ou `Binomiale FdR` Compléter ensuite dans l'ordre les paramètres n, p et k

Travail de l'élève 1 : Une enquête est effectuée auprès des 100 éléves d'un lycée syldave concernant le temps de travail hebdomadaire et le sexe des éléves. On a obtenu le tableau suivant

travail / sexe	< 5 minutes	≥ 5 minutes
filles	20	15
garçons	60	5

Soit T l'ensemble de ceux qui travaillent plus de 5 minutes par semaine et G l'ensemble des garçons.
On suppose les éléves syldaves indiscernables à la vue, l'ouïe, le goût, le toucher et l'odorat.

1. Calculer la probabilité que l'éléve prélevé travaille plus de 5 minutes.
2. Calculer la probabilité pour que ce soit un garçon.
3. Calculer la probabilité pour que l'éléve prélevé soit un garçon qui travaille plus de 5 minutes.
4. Maintenant, **parmi les garçons**, on en choisit un au hasard.
   L'univers a donc changé, mais pas les propriétés du tirage, ce qui assure encore l'équiprobabilité.
   Calculer la probabilité pour que ce garçon travaille plus de 5 minutes.
   *On dit que c'est **la probabilité conditionnelle de T sachant G** qu'on note* $\mathrm{P}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$
5. Conjecturer une formule liant $\mathrm{P}(\mathrm{G})$, $\mathrm{P}(\mathrm{T}\cap\mathrm{G})$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$.
6. Traduire en français $\mathrm{P}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, puis utiliser votre conjecture pour calculer cette probabilité.
   Cela est-il cohérent avec le tableau (ie sans utiliser la conjecture) ?

Exemple :

Prschtr, le champion syldave de danse sous-marine nocturne en scaphandre de 150 kg est inquiet avant la finale des Jeux Olympiques. Il a deux figures à réaliser.
On note A l'événement « Prschtr réussit sa première figure » et B l'événement « Prschtr réussit sa deuxième figure ».
Il sait, à force d'entraînement, que la probabilité qu'il réussissent la première est de 0,90.
Par contre, le moral de Prschtr n'est pas à toute épreuve, et la probabilité qu'il réussisse sa deuxième figure est de 0.8 s'il a réussi la première, sinon seulement de 0.5 .

1. Traduire les probabilités de l'énoncé sous forme mathématique.
2. Construire l'arbre de probabilité décrivant l'expérience.
3. Quelle est la probabilité que Prschtr réussisse ses deux figures ?
4. Quelle est la probabilité qu'il réussisse la deuxième ?
5. Prschtr a réussi sa deuxième figure, quelle ait la probabilité qu'il ait raté la première ?

Exemples :

Dire si les séparations suivantes sont des partitions de la classe :

- Séparer la classe en groupes suivant le sexe.
- Séparer une classe en un groupe fille, un groupe garçon et un groupe d'abonnés au chasseur syldave.
- Séparer la classe en groupes suivant la couleur des yeux.
- Séparer une classe en un groupe de porteurs de sandales avec chaussettes et un groupe d'imitateurs du Schblurb syldave.

Exemple :

On considère les urnes U_1, U_2 et U_3 contenant respectivement :

- 1 boule rouge et 5 jaunes
- 3 rouges et 1 jaune
- 1 rouge et 2 jaunes

On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne.
Quelle est la probabilité que la boule tirée soit jaune ?

Exemples :

- Ω est indépendant de tout événement A, car $P(\Omega \cap A) = P(A) = P(A) \times 1 = P(A) \times P(\Omega)$.
- Montrer que deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont pas indépendants.
- *On peut faire dire ce que l'on veut à des probabilités selon le modèle choisi.*
  Supposons que sur un groupe de 100 personnes, 20 portent des sous-vêtements en polystirène expansé, 50 se curent la narine droite avec l'index gauche et 10 font les deux à la fois.
  On met ces 100 personnes dans une boîte et on en tire une au hasard.
  1. Vérifiez que les événements « la personne tirée porte des sous-vêtements en polystirène expansé » et « la personne tirée se cure la narine droite avec l'index gauche » sont indépendants.
  2. Étudiez le même problème en considérant cette fois-ci que 15 personnes se curent la narine droite avec l'index gauche (pourquoi pas).