Travail de l'élève 1 :

PARTIE A : **Sur la trace des mathématiciens**

Au début du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution aux équations du 3$^{\text{ème}}$ degré de la forme $x^3+px+q=0$, où p et q désignent des nombres réels[1] :

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}} \qquad \text{où} \quad \Delta=q^2+4\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Pour information :

— Δ est appelé le **discrimant** du polynôme $\mathrm{P}(x)=x^3+px+q$

— Pour tout nombre a, le symbole $\sqrt[3]{a}$ désigne l'unique nombre b tel que $b^3=a$.

Bref, easy ... Et cette formule est bien évidemment à apprendre par coeur ![2]

1. Prenez-vous un instant pour Bombelli, mathématicien de la fin du XVI^{e} siècle, et appliquez cette formule à l'équation $x^3-15x-4=0$.
2. Quel problème survient ?
3. A l'époque, Bombelli eu l'audace de supposer, juste pour voir ce que cela donnait, que les règles de calcul usuel se prolongeaient aux racines carrés de nombres négatifs.
   Ne soyez pas si téméraires, car il est hors de question d'écrire encore des horreurs du type $\sqrt{-1}$![3]
   Heureusement pour nous, Euler (XVIII^{e}) est passé depuis Bombelli, et il a décrété qu'il noterait i un nombre imaginaire tel que $i^2=-1$.
   Prenez-vous désormais pour Bombelli avec la notation d'Euler, et :
   a. Simplifier au maximum l'expression de la solution cherchée, en utilisant le nombre imaginaire i
   b. Développer et simplifier $(2+i)^3$ et $(2-i)^3$
   c. Quelle serait alors une solution réelle de l'équation ? Le vérifier.
4. Déterminer a, b et c tels que $x^3-15x-4=(x-4)(ax^2+bx+c)$
5. Déterminer alors toutes les solutions de l'équation $x^3-15x-4=0$.

Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes, qui a mis bien longtemps à s'imposer et a déchaîné bien des passions …

PARTIE B : **A vous de jouer !**

1. Essayez de compter un peu avec ces nombres, en simplifiant au maximum les expressions suivantes :

$$\mathrm{A}=(3+4i)^2 \qquad \mathrm{B}=(3-4i)^2 \qquad \mathrm{C}=(3+4i)(3-4i) \qquad \mathrm{D}=(3+4i)(i-1)$$

$$\mathrm{E}=(5-3i)(7-2i) \qquad \mathrm{F}=(i-2)(2+i) \qquad \mathrm{G}=(5+7i)(3-i)(2-3i) \qquad \mathrm{H}=\frac{6-4i}{2+3i}$$

2. Que constatez-vous ?

1. De plus, on peut démontrer que toute équation de degré 3, ie de la forme $ax^3+bx^2+cx+d=0$, est équivalente à une équation de ce type.
2. Non, je plaisante !
3. Pour tout nombre positif a, le symbole $\sqrt{a}$ désigne l'unique nombre positif b tel que $b^2=a$. Ainsi, le symbole $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens.

Résumé historique

Dès le XVI^e siècle, plusieurs mathématiciens commencent à manipuler les nombres complexes, sans bien comprendre ce qu'ils sont et sans savoir comment les représenter. Leur existence est alors très controversée.

En 1637, **Descartes** propose l'appellation de « nombres imaginaires », mais c'est **Gauss** en 1831 qui le premier les nomme les « nombres complexes ».
Le principal nombre complexe est un nombre imaginaire dont le carré vaut -1.
Jusqu'au XVIII^e siècle (pendant plus de 200 ans !), on notera avec réticence ce nombre $\sqrt{-1}$. Mais en 1777, **Euler**, déclarant que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction de la définition, introduit la notation i (comme imaginaire) pour le nombre qui vérifie $i^2 = -1$.

L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ apparaît alors : ce sont les nombres de la forme $a + ib$, avec a et b réels.
Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ sont conservées.

L'équation $x^2 = -1$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$ car :

$$x^2 = -1 \Longleftrightarrow x^2 - (-1) = 0 \iff x^2 - i^2 = 0 \iff (x+i)(x-i) = 0 \Longleftrightarrow x = i \text{ ou } x = -i$$

On sait qu'il n'existe pas d'autres solutions dans un ensemble encore plus grand, notamment grâce à l'écriture factorisée (même si la démonstration est bien plus ardue que cela).
En fait c'est le cas de toutes les équations polynomiales à coefficients dans $\mathbb{C}$: elles admettent toutes leurs solutions dans $\mathbb{C}$ (en fait, autant que le degré de l'équation). On dit que $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.
Ainsi, je vous rassure, on ne construira pas d'ensemble de nombres plus grand que $\mathbb{C}$.

Ce n'est cependant qu'au XIX^e siècle que les nombres imaginaires prennent leur statut officiel de nombres, grâce au suisse **Argand** qui proposa une représentation géométrique de ces nombres.

Ces nombres ont notamment servi pour formaliser la théorie de la relativité d'Einstein (1905). A votre niveau, ils sont utiles pour la résolution d'équations et en géométrie dans un second chapitre.

Travail de l'élève 2 : L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $X^2 = a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler les solutions de l'équation $X^2 = a$ dans le cas où $a \geq 0$.
2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 = -3$.
   a. Vérifier que $i\sqrt{3}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
   b. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $X^2 = a$ dans le cas $a < 0$.
   a. Vérifier que $a = \left(i\sqrt{-a}\right)^2$.
   b. En déduire que l'équation considérée possède deux solutions complexes que l'on précisera.

Travail de l'élève 3 : L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c réels tels que $a \neq 0$.

1. Rappeler le discriminant Δ de cette équation, ainsi que les solutions de l'équation $ax^2 + b + c = 0$ dans le cas où $\Delta \geq 0$.

2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

a. Calculer le discriminant Δ de cette équation. Quel problème survient ?

b. Ecrire Δ sous la forme d'un carré de nombre complexe.

c. Vérifier que le nombre $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ est solution de l'équation considérée.

d. Quelle est alors l'autre solution de l'équation ?

3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas le discriminant Δ est strictement négatif.

On rappelle que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire de manière équivalente $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

a. Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

b. En remplaçant Δ par cette nouvelle écriture, résoudre alors l'équation considérée.

Travail de l'élève 3 : L'objectif de l'activité est de résoudre dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c réels tels que $a \neq 0$.

1. Rappeler le discriminant Δ de cette équation, ainsi que les solutions de l'équation $ax^2 + b + c = 0$ dans le cas où $\Delta \geq 0$.

2. On cherche ensuite à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

a. Calculer le discriminant Δ de cette équation. Quel problème survient ?

b. Ecrire Δ sous la forme d'un carré de nombre complexe.

c. Vérifier que le nombre $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ est solution de l'équation considérée.

d. Quelle est alors l'autre solution de l'équation ?

3. On cherche désormais à généraliser notre raisonnement et à trouver toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dans le cas le discriminant Δ est strictement négatif.

On rappelle que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire de manière équivalente $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

a. Vérifier que $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$.

b. En remplaçant Δ par cette nouvelle écriture, résoudre alors l'équation considérée.