Il existe en Syldavie une terrible maladie qui frappe depuis des siècles les petits syldaves et les fait naître avec un unique mais énorme cheveu sur la tête.
C'est Vaclav GRTSCHTSZ qui, le premier, contracta cette maladie en 1643 après être rentré en contact avec des vénusiens : ce fait peu connu marque la cause de l'apparition de la maladie en Syldavie. Depuis, tous ses descendants ont souffert de ce terrible mal et aucun médicament terrestre ne semble en mesure de stopper cette calamité.
Après de longues années de recherches, les scientifiques syldaves viennent de mettre en évidence que cette maladie était bien génétique et que l'allèle associé à cette maladie était dominant.

Résumons les faits :

- Notons n la $n^{\text{ème}}$ génération aprés Vaclav et $\mathscr{P}(n)$ la proposition : « la $n^{\text{ème}}$ génération est infectée par la maladie »
- Un premier syldavien est infecté en 1643, donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie ;
- Si un des parents de la $k^{\text{ème}}$ génération est atteint, alors ses enfants de la $(k+1)^{\text{ème}}$ génération seront également infectés, puisque la maladie est portée par un allèle dominant. Ceci se traduit par

$$\mathscr{P}(k) \text{ vraie} \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1) \text{ vraie}$$

- Nous en déduisons immédiatement que, quelque soit la génération n des descendants de Vaclav, ceux-ci seront infectés, c'est à dire que $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

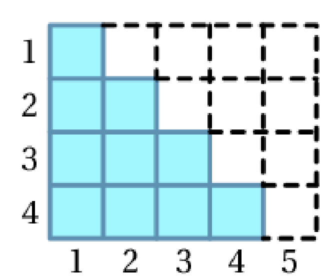
Nous venons de faire un **raisonnement par récurrence**.
Remarquons que l'on ne sait rien sur la contamination de syldaves ne descendant pas de Vaclav, puisque l'on n'a aucune information sur un éventuel mode de contagion de la maladie. D'où l'importance pour un syldave quelconque de regarder l'initialisation !

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer des propositions mathématiques vraies pour tout entier naturel n (ou une partie d'entre eux). Les étapes de la démonstration seront les mêmes, et en mathématiques aussi, l'hérédité sera la partie la plus difficile à montrer (mais vous ne pourrez pas vous permettre d'y passer des années ! !)

Voyons ce que cela donne sur un exemple un peu plus mathématique.

Voici un test de fin d'étude maternelle en Syldavie : prenez un cube, placez en-dessous deux autres cubes, et encore en-dessous trois cubes, etc.
Combien y a-t-il de cubes bleus au total sur le dessin ci-dessus ?
On peut encore les compter à la main, mais que faire si je vous demande le nombre de cubes lorsqu'on a placé 100 rangées ? n rangées ?

Le dessin nous donne une idée...



Exercice du Cours : Prenons un cube, rajoutons trois autres cubes pour former un carré, puis cinq autres cubes pour former un plus grand carré, puis sept autres cubes pour former un carré encore plus grand...

Nous voulons maintenant connaître le nombre de cubes présents à la $n^{\text{ème}}$ étape.

1. Proposez une formule générale inspirée du résultat de notre petite activité de *maternelle*.

2. Démontrez par récurrence votre proposition, en complétant la trame ci-dessous.

— **Proposition :** On veut montrer que notre proposition $\mathscr{P}(n)$: ...
est vraie pour tout $n \geq$ ...

— **Initialisation :** Pour $n =$ ...

Donc notre proposition est vraie au rang ...

— **Hérédité :** Soit k un entier supérieur ou égal à ... Montrons que $\mathscr{P}(k)$ vraie $\Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)$ vraie.

Il s'agit donc de montrer que ...

sachant ...

Or $1+3+5+\cdots+ \quad \ldots \quad + \quad \ldots \quad = \quad \ldots$

$=$

Ainsi, notre proposition est vraie au rang ... Donc, notre proposition est ...

— **Conclusion :** Notre proposition est ... et ...

Elle est donc vraie pour tout $n \geq$ ...