DEVOIR MAISON 6
LES SUITES

Exercice 1 : Amérique du Sud 2014

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = u_n - 3$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).

   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1\,;\,0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

   Déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

Exercice 2 : Trouver une suite :

1. non majorée mais qui ne tende pas vers $+\infty$.
2. croissante mais dont la limite n'est pas $+\infty$.
3. divergente vers $+\infty$ mais qui n'est pas croissante.
4. à termes strictement positifs et strictement décroissante mais qui ne converge pas vers 0.

Des illustrations graphiques de suites peuvent vous aider. D'ailleurs, à défaut de trouver les expressions algébriques des suites demandées, vous pouvez joindre vos illustrations.

C. Aupérin
charlotte.auperin@ac-montpellier.fr