TUTORAT-SÉANCE 8

Objectifs :

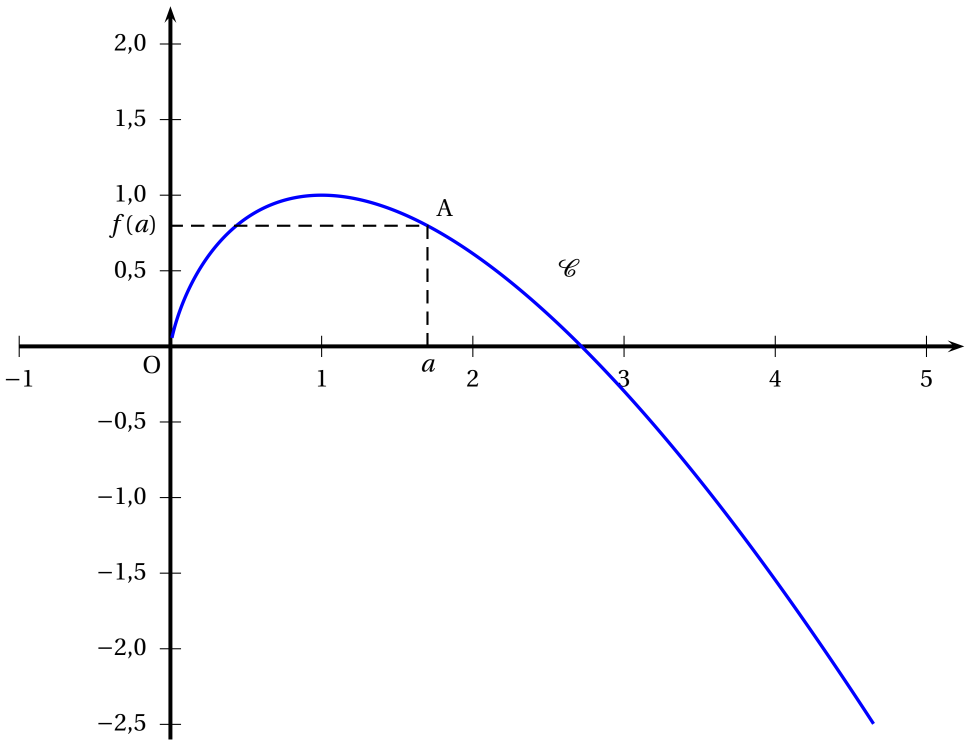
1. Utiliser les propriétés algébriques du logarithme népérien.
2. Etudier des fonctions dont l'expression comporte du logarithme népérien.

<u>Exercice</u> 1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée en annexe 1 (à rendre avec la copie).

1. Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
2. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse a.
   (a) Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A′, point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées.
   (b) Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a). Sur l'annexe 1 (à rendre avec la copie) construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.



Eléments de correction (Exercice 1)

1. Comme x est supérieur à zéro, le signe de $f(x)$ est celui de $1 - \ln x$.
   Or $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln \mathrm{e} > \ln x \iff \mathrm{e} > x$ par croissance de la fonction ln.
   On a donc :
   $f(x) > 0 \iff 0 < x < \mathrm{e}$;
   $f(x) = 0 \iff x = \mathrm{e}$;
   $f(x) < 0 \iff x > \mathrm{e}$.
2. • Au voisinage de zéro : $f(x) = x - x\ln x$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
   • Au voisinage de plus l'infini :
   On a $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \ln x = -\infty$. Par produit des limires on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.
   Remarque : la lecture de l'annexe correspond bien à ces résultats.
3. f produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
   $f'(x) = 1 - \ln x + x \times \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$.
   Or $-\ln x > 0 \iff \ln x < 0 \iff \ln x < \ln 1 \iff x < 1$ par croissance de la fonction ln.
   De même $-\ln x > 0 \iff x > 1$.
   Conclusion : la fonction est croissante sur $]0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0		$-$		
$f(x)$	‖ 0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

4. (a) On a $M(x\,;\,y) \in (T_a) \iff y - f(a) = f'(a)(x-a) \iff y - a + a\ln a = -\ln a(x-a) \iff$
   $y = -x\ln a + a$.
   Le point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle, d'où $y = a$, ordonnée du point A'.
   Conclusion : $A'(0\,;\,a)$.
   (b) Il suffit de tracer le quart de cercle centré en O de rayon a qui coupe l'axe des ordonnées au point $A'(0\,;\,a)$
   Du point $(a\,;\,0)$ donné sur la figure on trace la verticale qui coupe $\mathscr{C}$ au point $A(a\,;\,f(a))$.
   La tangente est la droite (AA'). Voir à la fin la figure.

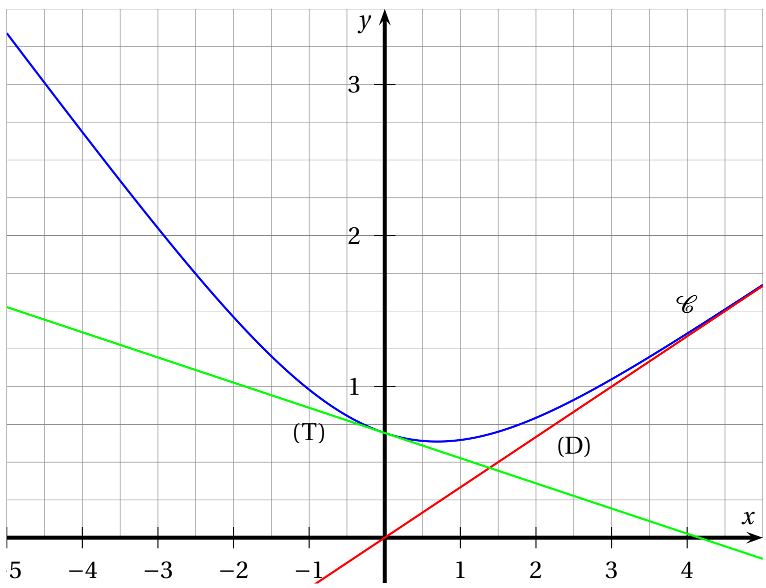
Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Tracer (D).
   (c) Etudier la position relative de (D) et de $(\mathscr{C})$.
   (d) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^x + 1\right) - \frac{2}{3}x$.
   (e) En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 2}{3\left(\mathrm{e}^x + 1\right)}$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f.

Eléments de correction (Exercice 2)



Partie A

1. (a) On a $\lim +\infty e^{-x} = 0$, donc $\lim +\infty 1 + e^{-x} = 1$ donc $\lim +\infty \ln(1 + e^{-x}) = 0$ donc $\lim +\infty f(x) = +\infty$
   (b) Comme $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$ et que $\lim +\infty \ln\left(1 + e^{-x}\right) = 0$, on en déduit que la droite (D) est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$.
   (c) Comme $f(x) - \frac{1}{3}x = \ln(1 + e^{-x})$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \{-x\} > 0$, on a $1 + e^{-x} > 1$ et donc $\ln\left(1 + e^{-x}\right) > 0$, dont on déduit que l'asymptote (D) est en dessous de la courbe $(\mathscr{C})$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) Soit x un réel. On a $f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) + \frac{1}{3}x = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x) + \frac{1}{3}x = \ln(e^x + 1) - x + \frac{1}{3}x$
   soit $f(x) = \ln(e^x + 1) - \frac{2}{3}x$
   (e) On a $\lim -\infty e^x = 0$ donc $\lim -\infty e^x + 1 = 1$, donc $\lim -\infty \ln\left(e^x + 1\right) = 0$ et comme par ailleurs, $\lim -\infty - \frac{2}{3}x = +\infty$, on en déduit $\lim -\infty f(x) = +\infty$

2. (a) f est dérivable en tant que composée d'une fonction $x \longmapsto e^x + 1$, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,où la fonction ln est dérivable : cette composée est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction linéaire que l'on y ajoute pour obtenir $f(x)$ étant elle même dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est : $f'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{3e^x}{3(e^x+1)} - \dfrac{2(e^x+1)}{3(e^x+1)} = \dfrac{3e^x - 2(e^x+1)}{3(e^x+1)} = \dfrac{e^x-2}{3(e^x+1)}$.
(b) Le dénominateur de f' est strictement positif, donc f' est du signe de son numérateur, et $e^x - 2 > 0 \Longleftrightarrow x > \ln(2)$. On en déduit donc que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 2]$ puis strictement croissante sur $[\ln 2; +\infty[$.

Exercice 3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(1+x).$$

(a) En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leqslant x$.
(b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.
(c) La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.
(a) On pose $x = \dfrac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.
(b) Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Eléments de correction (Exercice 3)

---

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et pour tout réel $x \geqslant 0$: $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{1+x} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $x \geqslant 0$ on a alors $f(x) \geqslant f(0)$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geqslant 0$, d'où : $\ln(1+x) \leqslant x$.
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$, donc d'après la question précédente : $\ln(u_n) \leqslant n \times \dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire $\ln(u_n) \leqslant 1$.
(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(u_n) \leqslant 1$, donc $u_n \leqslant \mathrm{e}$ et la suite (u_n) est majorée par e, elle ne peut donc pas diverger vers $+\infty$.

2. (a) $v_n = \ln(u_n) = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$, en posant $x = \dfrac{1}{n}$ on a donc : $v_n = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ d'après une limite du cours. Quand $n \to +\infty$, on a $x \to 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.
(c) $v_n = \ln(u_n)$, donc $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$, et comme (v_n) converge vers 1, on en déduit que (u_n) converge vers e.