TUTORAT-SÉANCE 7

Objectifs :

1. Utiliser les propriétés algébriques du logarithme népérien.
2. Etudier des fonctions dont l'expression comporte du logarithme népérien.

Exercice 1. Transformer une suite géométrique en une suite arithmétique

On considère la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n \end{cases}$

1. Déterminer la nature de la suite u
2. Écrire u_n en fonction de n et préciser le signe de u_n, pour tout entier naturel n
3. Déterminer à l'aide d'une calculatrice graphique le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_n > 100$
4. On pose $v_n = \ln(u_n)$.
   (a) Écrire v_n en fonction de n
   (b) En déduire la nature de la suite (v_n)
   (c) Résoudre l'inéquation $v_n > \ln(100)$ et expliquer comment on peut retrouver le résultat de la question 3.

Exercice 2. Soit f et g les fonction définies sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leur courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

Partie A : Étude du sens de variation de f et de celui de g

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$
2. Étudier le sens de variation de chacune des fonctions f et g ; dresser leur tableau de variations.

Partie B : Étude des positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

On considère la fonction d, définie sur $]1;+\infty[$ par $d(x) = f(x) - g(x)$.

1. (a) Calculer $d'(x)$
   (b) Étudier le sens de variation de d et donner son tableau de variations
   (c) Calculer $d(2)$
   En déduire le signe de $d(x)$, lorsque $x \in]1;+\infty[$
2. En utilisant les résultats précédents :
   (a) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un seul point commun, noté A, dont on donnera les coordonnées
   (b) Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent au point A la même tangente $\mathscr{T}$, dont on donnera l'équation réduite
   (c) étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$
3. Tracer, avec précision, la droite $\mathscr{T}$ et les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complètera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Etude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$, on pose $\mathrm{N}(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.
   Calculer $\mathrm{N}(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : Etude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\,;\,4]$, alors $f(x) \in [0\,;\,4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{cases}$$

   (a) Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.

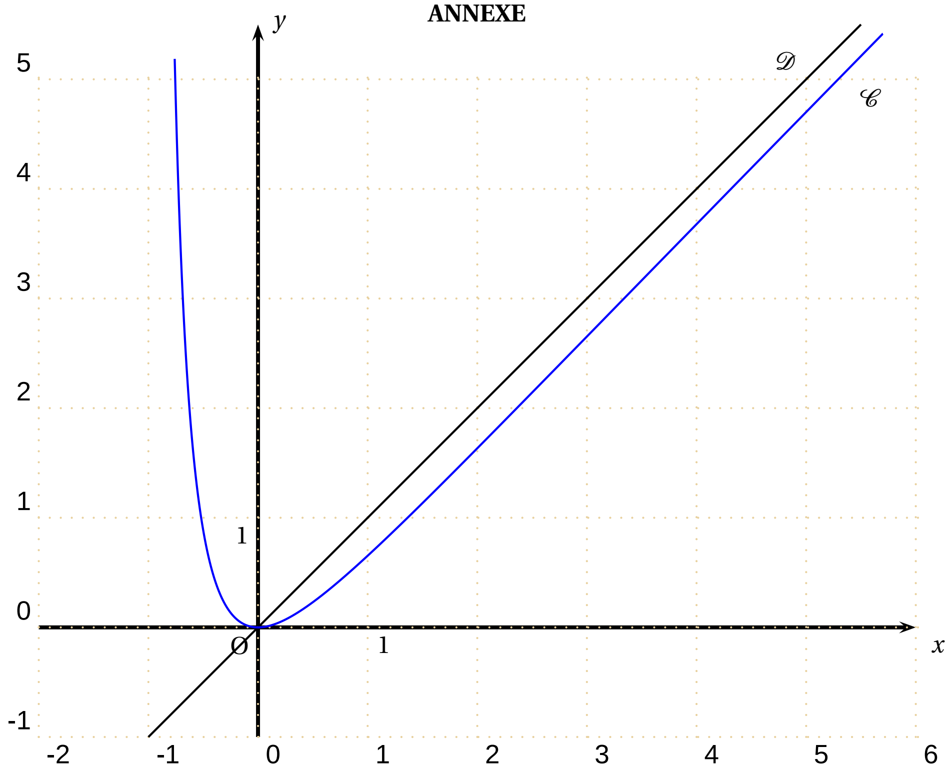
   (b) Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.

   (c) Etudier la monotonie de la suite (u_n).

   (d) Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.

   (e) Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.

ANNEXE



Eléments de correction (Exercice 3)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

Partie A

1. f est dérivable comme composée, quotient et somme de fonctions dérivables sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   $f = u - \dfrac{\ln v}{v}$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = 1 + x$. $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$.
   $f' = u' - \left(\dfrac{\ln v}{v}\right)' = u' - \dfrac{\dfrac{v'}{v} \times v - v' \ln v}{v^2} = u' - \dfrac{1 - v' \ln v}{v^2}$.
   Par conséquent, pour tout x de $]-1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = \dfrac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$.
2. On pose $\mathrm{N}(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$. N est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables.
   $\mathrm{N}'(x) = 2 \times 1 \times (1+x) + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2(1+x)^2 + 1}{1+x}$. Comme x appartient à $]+1\ ;\ +\infty[$, $1 + x > 0$. Le numératuer est positif comme somme de nombres strictement positifs. Par conséquent, $\mathrm{N}(x) > 0$ pour tout x. On en déduit que N est

croissante sur $]-1\,;\,+\infty[$.
$N(0)=0$ donc $N(x)<0$ pour tout x de $]-1\,;\,0[$ et $N(x)>0$ pour tout $x>0$.
$f'(x)=\dfrac{N(x)}{(1+x)^2}$ qui est du signe du numérateur $N(x)$ car $(1+x)^2>0$ pour tout x.
Par conséquent, $f'(x)<0$ sur $]-1\,;\,0[$, $f'(0)=0$ et $f'(x)>0$ pour $x>0$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

$\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y=x$. Pour avoir les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de $\mathscr{C}$, on résout l'équation $f(x)=x$.
$f(x)=x \Leftrightarrow -\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}=0 \Leftrightarrow \ln(1+x)=0 \Leftrightarrow 1+x=1 \Leftrightarrow x=0$.
Comme $f(0)=0$, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ se coupent à l'origine.

Partie B

1. Sur l'intervalle $[0\,;\,4]$, f est croissante donc pour tout x de $[0\,;\,4]$, $0=f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(4)$; or $f(4)=4-\dfrac{\ln 5}{5}<4$ donc $f(x)\in[0\,;\,4$.
2. (a) Voir courbe.
   (b) Montrons par récurrence sur n, que, pour tout n, $u_n\in[0\,;\,4]$.
      i. Amorçage : $u_0=4\in[0\,;\,4]$ donc c'est vrai au rang 0.
      ii. Hérédité : supposons que $u_n\in[0\,;\,4]$ pour un entier n. Alors $u_{n+1}=f(u_n)\in[0\,;\,4]$ d'après 1.
      Par conséquent, $u_n\in[0\,;\,4]$ pour tout n.
   (c) Pour tout n, $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=u_n-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}-u_n=-\dfrac{\ln(1+u_n)}{1+u_n}\leqslant 0$ car $1+u_n\geqslant 1$ d'où $\ln(1+u_n)\geqslant 0$.
   Par conséquent, la suite (u_n) est décroisssante.
   (d) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 : elle est convergente vers un réel ℓ.
   (e) Comme f est continue, on sait que ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$. On en déduit que $\ell=0$.