

TUTORAT-SÉANCE 6

Objectifs :

1. Utiliser les propriétés algébriques du logarithme népérien.
2. Etudier des fonctions dont l'expression comporte du logarithme népérien.

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (on prendra soin de déterminer le domaine de validité de l'équation) :

(a) $\ln(x-1) + \ln(x+2) = 0$

(c) $\ln x + \ln(2x-1) = \ln 2$

(b) $\ln x + \ln(x+1) = 3$

(d) $\ln(x^2 - 3x + 1) = \ln(2x - 7)$

2. Déterminer le plus petit entier n tel que :

(a) $10,01^n \geq 1000$

(b) $0,99^n \leq 0,0001$

3. Déterminer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les nombres suivants :

(a) $A = \ln \frac{81}{256}$

(c) $C = \ln 36^2$

(b) $B = \ln 0,25$

(d) $D = \ln 4096$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 4 cm.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$, puis la limite de f en $+\infty$.
2. Etudier les variations de f .
3. Montrer que pour tout réel x ,

$$f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$$

En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet, en $-\infty$ une asymptote Δ . dont on déterminera l'équation.

4. Tracer Δ et $\mathcal{C}_f$

Exercice 3. On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ par

$$f(x) = \ln(1 + 2x).$$

1. Justifier que f est strictement croissante sur l'intervalle I .
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.
3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par $g(x) = f(x) - x$.
 - (a) Etudier les variations de g sur l'intervalle I .
 - (b) Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et une autre, notée β , appartenant à l'intervalle $[1; 2]$.
 - (c) En déduire le signe de $g(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I .
4. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0; \beta[$, $f(x)$ appartient aussi à $]0; \beta[$.

Eléments de correction (Exercice 3)

1. Comme $1 + 2x > 0$ sur I , f est définie sur cet intervalle et est dérivable comme fonction composée de fonctions dérivables :

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0. \text{ La fonction est donc croissante sur } I.$$

2. Comme $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (1 + 2x) = 0_+$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.

3. (a) Sur I , $g(x) = f(x) - x$; g est dérivable comme différence de deux fonctions dérivables sur I et
- $$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{1+2x} - 1 = \frac{2-1-2x}{1+2x} = \frac{1-2x}{1+2x} \text{ qui est du signe de } 1-2x \text{ puisque sur } I,$$

$$1-2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Conclusion : g est croissante sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

- (b) On a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$.

Cherchons la limite de g au voisinage de $+\infty$:

$$g(x) = \ln(1+2x) - x = \ln x \left(2 + \frac{1}{x}\right) - x = \ln x + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) - x =$$

$$x \left[\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x} - 1 \right].$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x} = 0$, la limite du crochet est donc égale à -1 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Sur $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$, g est croissante de $-\infty$ à $\ln 2 - \frac{1}{2} > 0$. f étant continue sur cet intervalle il existe un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$. Il est évident que $\alpha = 0$.

De même sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, g décroît de $\ln 2 - \frac{1}{2} > 0$ à $-\infty$; g étant continue sur cet intervalle, il existe un réel unique β de cet intervalle tel que

$$g(\beta) = 0.$$

On vérifie que $g(1) \approx 0,098 > 0$ et que $g(2) \approx -0,39 < 0$.

Conclusion : $1 < \beta < 2$.

- (c) On en déduit le signe de g :

- sur $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$, $g(x) < 0$
- sur $]0; \beta[$, $g(x) > 0$
- sur $]\beta; +\infty[$, $g(x) < 0$
- $g(0) = g(\beta) = 0$.

4. $0 < x < \beta \Rightarrow f(0) < f(x) < f(\beta)$ par croissance de la fonction f .

$$f(0) = 0 \text{ et } f(\beta) = g(\beta) + \beta = 0 + \beta = \beta.$$

Conclusion : $0 < x < \beta \Rightarrow 0 < f(x) < \beta$.