# Tutorat-séance 5

***Objectifs*** :

1. Interprétation géométrique du quotient de deux nombres complexes
2. Connaître et utiliser la forme complexe des translations, rotations et homothéties

**Exercice 1.**

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
   On pose $a=3,\ b=5-2\text{i}$ et $c=5+2\text{i}$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a,\ b$ et $c$.
   Soit $M$ un point d'affixe $z$ du plan, distinct des points A et B.
   (a) Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
   (b) Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$.
   (c) Déterminer alors l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.
2. Soit $\Gamma$ le cercle circonscrit au triangle ABC et $\Omega$ le point d'affixe $2-\text{i}$.
   (a) Donner l'écriture complexe de la rotation $r$ de centre $\Omega$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Déterminer l'image $\Gamma'$ de $\Gamma$ par la rotation $r$. Déterminer une équation paramétrique de $\Gamma'$.

---

**Eléments de correction (Exercice 1)**

---

1. (a) On a $c-a=2+2\text{i}$ et $b-a=2-2\text{i}$ ; or $c-a=2+2\text{i}=\text{i}(2-2\text{i})=\text{i}(b-a)$. Cette égalité signifie que C est l'image de B dans le quart de tour direct de centre A. Donc le triangle ABC est rectangle en A.
   (b) On a $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}=\dfrac{z-z_\text{A}}{z-z_\text{B}}$. Donc $\arg\left(\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}\right)=\left(\overrightarrow{\text{A}M},\ \overrightarrow{\text{B}M}\right)$
   (c) Le nombre $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$ est un réel strictement négatif si et seulement si l'un des ses arguments est égal à $\pi$. D'après le b, on a donc $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}\in\mathbb{R}^-\iff\left(\overrightarrow{\text{A}M},\ \overrightarrow{\text{B}M}\right)=\pi\quad[2\pi]\iff M\in]\text{AB}[$.
   L'ensemble cherché est donc le segment ouvert $]\text{AB}[$.
2. (a) Si $z'$ est l'affixe du point image du point d'affixe $z$ dans la rotation $r$ de centre $\Omega$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, cette affixe vérifie $z'-\omega=-\text{i}\,(z-\omega)\iff$
   $z'=-\text{i}z+\omega(1+\text{i})\iff z'=z'=-\text{i}z+(2-\text{i})(1+\text{i})\iff\boxed{z'=-\text{i}z+3+\text{i}}$.
   (b) ABC étant rectangle isocèle en A, le centre E du cercle circonscrit $\Gamma$ est le milieu de [BC] d'affixe 5 et son rayon est égal à 2.
   Une rotation est une isométrie donc l'image du cercle $\Gamma$ est le cercle $\Gamma'$ dont le centre est E′, image de E par $r$ et de même rayon 2.
   On a alors : $z_{\text{E}'}=z'_\text{E}=-\text{i}z_\text{E}+3+\text{i}=-5\text{i}+3+\text{i}=3-4\text{i}$.
   Une équation paramétrique de $\Gamma'$ est alors : $z-z_{E'}=2\text{e}^{\text{i}\theta},\theta\in[0\ ;\ 2\pi[$ donc : $\boxed{z=3-4\text{i}+2\text{e}^{\text{i}\theta},\ \theta\in[0\ ;\ 2\pi[}$.

**Exercice 2.** Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O\vec{u},\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

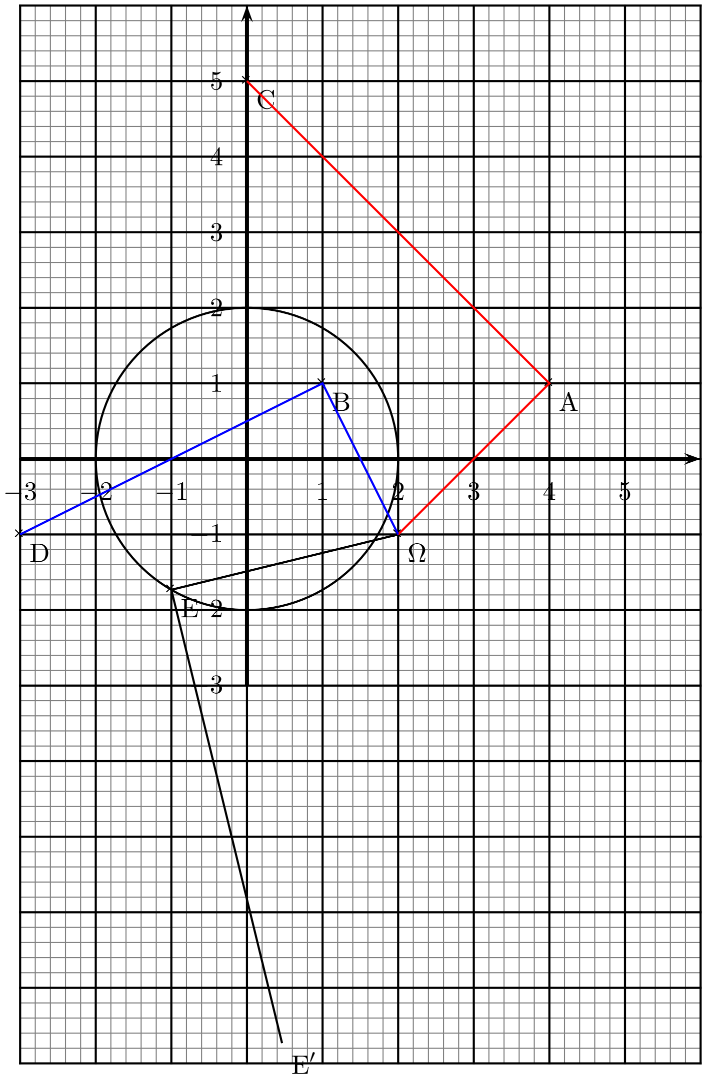
1. *Question de cours* On rappelle que : « Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe $z$ on a : $|z| = \|\overrightarrow{w}\|$ et arg $(z) = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right)$ ». Soient $M$, $N$ et $P$ trois points du plan, d'affixes respectives $m$, $n$ et $p$ tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.
   (a) Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.
   (b) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$
2. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives
$$z_{\text{A}} = 4+\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 1+\text{i}, \quad z_{\text{C}} = 5\text{i} \text{ et } z_{\text{D}} = -3-\text{i}.$$
   Placer ces points sur une figure.
3. Soit $f$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :
$$z' = (1+2\text{i})z - 2 - 4\text{i}.$$
   (a) Préciser les images des points A et B par $f$.
   (b) Montrer que $f$ admet un unique point invariant $\Omega$, dont on précisera l'affixe $\omega$.
4. (a) Montrer que pour tout nombre complexe $z$, on a :
$$z' - z = -2\text{i}(2-\text{i}-z).$$
   (b) En déduire, pour tout point $M$ différent du point $\Omega$, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$
   (c) Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$ ?
   (d) Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = -1-\text{i}\sqrt{3}$. écrire $z_{\text{E}}$ sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E$'$ associé au point E.

---

**Eléments de correction (Exercice 2)**

---

1. Cf. cours.
2. Cf Figure
3. (a) On obtient $z_{\text{A}'} = 5\text{i} = z_{\text{C}}$ et $z_{\text{B}'} = -3-3\text{i} = z_{\text{D}}$.
   (b) $M(z)$ est invariant par $f$ si et seulement si $z' = z = (1+2\text{i})z - 2 - 4\text{i} \iff 2\text{i}z = 2+2\text{i} \iff z = 2-\text{i}$. L'équation ayant une seule solution, $f$ a un seul point invariant $\Omega$ d'affixe $\omega = 2-\text{i}$.
4. (a) On a $z' - z = 2\text{i}z - 2 - 4\text{i} = -2\text{i}(2-\text{i}-z)$.
   (b) En prenant le module des deux complexes ci-dessus, on obtient $MM' = |-2\text{i}| \times \Omega M$ et si $\Omega \neq M$, $\dfrac{MM'}{\Omega M} = 2$.
   L'égalité trouvée au a peut, si $\Omega \neq M$, s'écrire $\dfrac{z'-z}{2-\text{i}-z} = -2\text{i}$. En prenant les arguments de ces deux complexes, on obtient $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
   (c) On en déduit que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle en $M$.
   (d) On a $|z_{\text{E}}|^2 = 1+3 = 4 = 2^2$.
   Donc $z_{\text{E}} = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}\right) = 2\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + \text{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\text{e}^{-\text{i}\frac{2\pi}{3}}$.
   Pour placer le point E, il suffit de construire le cercle de centre O et de rayon 2. Le point E est le point de ce cercle d'abscisse 1.
   D'après les questions b et c on a EE$'$ = 2ΩE et $\left(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. On construit donc la perpendiculaire en E à la droite (EΩ) et on place sur cette droite le point E$'$ tel que EE$'$ = 2ΩE et $\left(\overrightarrow{E\Omega}, \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.


C
A
B
D
Ω
E
E′
5
4
3
2
1
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
−1
−2
−3