Tutorat-séance 3

Objectifs :

1. Maitriser les propriétés élémentaires de la fonction exponentielle.
2. Utiliser la formule $(e^u)' = u'e^u$
3. Connaitre et utiliser les résultats sur les limites

Exercice 1. Calculer les limites des fonctions ci-dessous en $+\infty$ et en $-\infty$

1. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$
2. $f(x) = e^x - x$
3. $f(x) = x^2 x^{2x}$
4. $f(x) = (x^2 - x)e^x$
5. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$
6. $f(x) = x^2 e^{-x}$
7. $f(x) = \dfrac{e^{2x} - e^x}{e^x + 1}$
8. $f(x) = \dfrac{e^x(e^{-x}+1)}{e^x+1}$

Exercice 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g(x) = 2\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$$

et $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique.

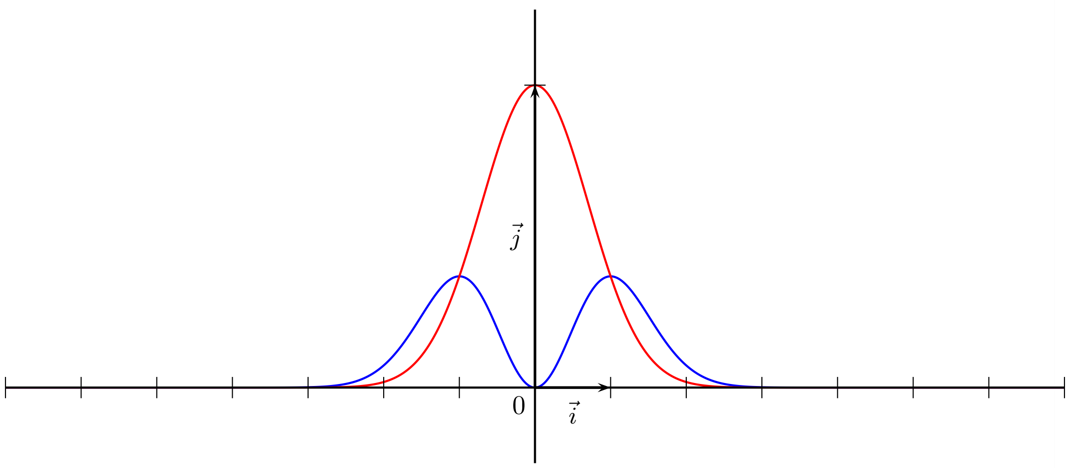
1. (a) Montrer que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.
   (b) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.
   (c) Déterminer l'abscisse α du point d'intersection de Δ et de la tangente à $\mathscr{C}_g$ à l'origine.

Exercice 3. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 e^{-x^2}$$

On note respetivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, dont les tracés se trouvent ci-dessous.

1. Identifier $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, justifier.
2. Etudier la parité des fonctions f et g.
3. Etudier le sens de variation des fonctions f et g. Etudier les limites de f et g en $\pm\infty$.
4. Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Objectifs : Résolution des équations différentielles du type

$$y' = ay + b$$

Exercice 4. Au début de l'épidémie on constate que 0,01 % de la population est contaminé.
Pour t appartenant à $[0\,;\,30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours.
On a donc $y(0) = 0,01$.
On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0\,;\,30]$ est dérivable, strictement positive et vérifie :

$$y' = 0,05y(10 - y).$$

1. On considère la fonction z définie sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ par $z = \dfrac{1}{y}$.
   Démontrer que la fonction y satisfait aux conditions $\begin{cases} y(0) & = & 0,01 \\ y' & = & 0,05y(10-y) \end{cases}$ si et seulement si la fonction z satisfait aux conditions $\begin{cases} z(0) & = & 100 \\ z' & = & -0,5z + 0,05 \end{cases}$
2. (a) En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.
   (b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + \cos x$.

1. Déterminer deux nombres réels a et b tels que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f_0(x) = a\cos x + b\sin x$$
   soit une solution f_0 de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' = 2y$.
3. Démontrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - f_0$ est solution de (E_0).
4. En déduire les solutions de (E).
5. Déterminer la solution k de (E) vérifiant $k\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2. En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E').
3. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe reprsentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec les axes du repère.
5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.