Tutorat-séance 2

Objectifs :

1. Maitriser les propriétés élémentaires de la fonction exponentielle.
2. Utiliser la formule $(e^u)' = u'e^u$
3. Connaitre et utiliser les résultats sur les limites

Exercice 1. Simplifiez au maximum les expressions suivantes :

1. $e^x e^{-x}$
2. $e^x e^{-x+1}$
3. ee^{-x}
4. $\left(e^{-x}\right)^2$
5. $\dfrac{e^{2x}}{e^{2-x}}$
6. $\dfrac{\left(e^x\right)^3}{e^{2x}}$
7. $e^x\left(e^x + e^{-x}\right)$
8. $\left(e^x\right)^5\left(e^{-2x}\right)^2$
9. $e^{-3x+1}\left(e^x\right)^3$
10. $\sqrt{e^{-2x}}$
11. $\dfrac{e^{-4x}e}{\left(e^{-x}\right)^2}$
12. $\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2$
13. $\left(e^x - e^{-x}\right)^2 - e^{-x}\left(e^{3x} - e^{-x}\right)$
14. $\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^{2x} + e^x + 1\right)$

Exercice 2. Calculer les dérivées et les limites aux bornes des ensembles de définitions des fonctions définies par les expressions suivantes, dresser leur tableau de variation et donner les éventuels extremum :

1. $f_1(x) = e^x + x^2 + 1$
2. $f_2(x) = 5e^x + 5xe^x$
3. $f_3(x) = e^x \sin(x)$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$
5. $f_5(x) = \dfrac{3x + 1 - e^x}{e^x}$
6. $f_6(x) = x^3 e^{-x}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x^2 e^x}{x + 1}$
8. $f_8(x) = \dfrac{e^x}{x}$
9. $f_9(x) = \dfrac{1}{e^x}$
10. $f_{10}(x) = \left(e^x\right)^2 + \dfrac{1}{e^x}$
11. $f_{11}(x) = e^{-x}$
12. $f_{12}(x) = e^{4x+1}$
13. $f_{13}(x) = e^{\cos(x)}$
14. $f_{14}(x) = e^{5x^3+7x+4}$
15. $f_{15}(x) = (x + 1)e^{-x+1}$
16. $f_{16}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

Exercice 3. Le plan est rapporté un repère orthonormal. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - 2,1\mathrm{e}^x + 1,1x + 1,6$$

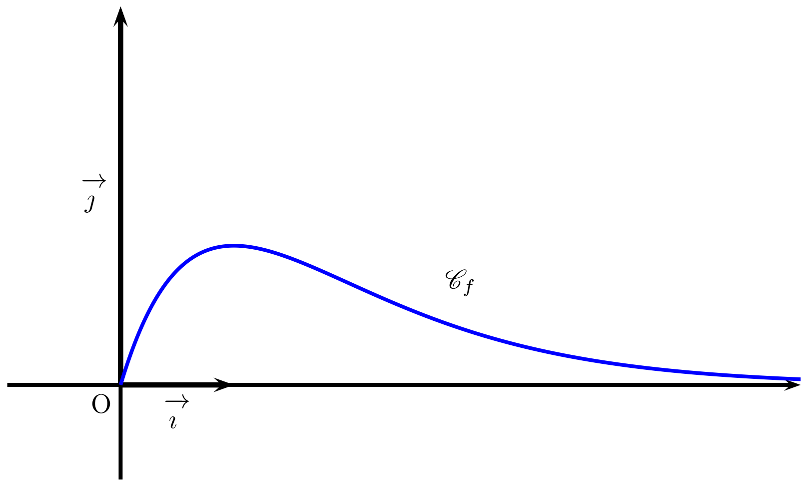
1. Faites apparatre sur l'écran de votre calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fentre $-5 \leqslant x \leqslant 4$, $-4 \leqslant y \leqslant 4$. Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur votre copie.
2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :
   (a) Sur les variations de la fonction f ?
   (b) Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?
3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^{2x} - 2,1\mathrm{e}^x + 1,1 \geqslant 0$ (on pourra poser $X = \mathrm{e}^x$).
   (b) Étudier les variations de la fonction f.
   (c) Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,05 \;;\; 0,15]$, de faon visualiser les résultats de la question **3.** Quelles valeurs extrmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fentre de la calculatrice ?

Exercice 4. Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0 \;;\; +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?
2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.
3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.
4. Quelle semble être la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}_g$? Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

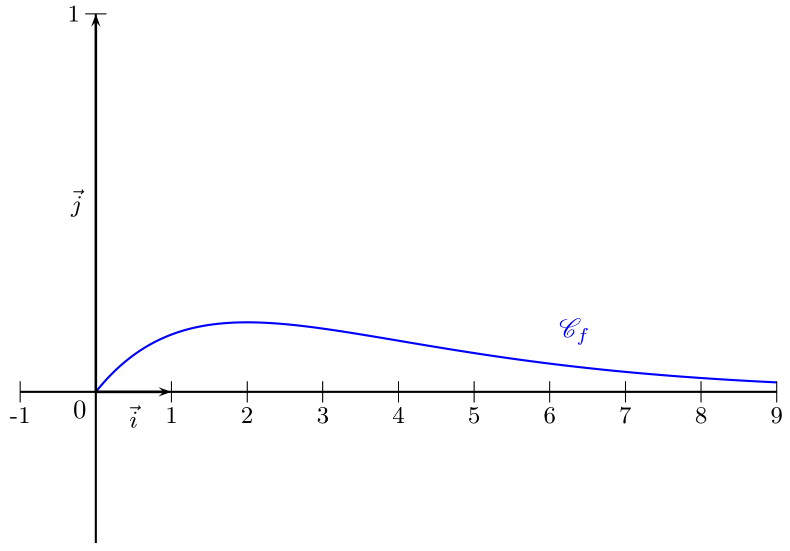


Exercice 5.

1. **Restitution organisée de connaissances.**
   L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
   On supposera connus les résultats suivants :
   (a) la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
   (b) $\mathrm{e}^0 = 1$;
   (c) pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$.
   (d) Soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ où A est un réel positif.
   Si pour tout x de $[A\ ;\ +\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

   (a) On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.
   (b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   La courbe $\mathscr{C}$ est représentée en annexe.
   (a) Montrer que f est positive sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour $\mathscr{C}$.
   (c) Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. On considère la fonction F définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) == 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
   (a) Montrer que F est une fonction strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Justifier l'existence d'un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.


1
$\vec{j}$
$\mathscr{C}_f$
-1
0
$\vec{i}$
1
2
3
4
5
6
7
8
9