Tutorat-séance 1

Objectifs :

1. Maitriser la dérivée, et l'étude de son signe.
2. Maitriser limites, asymptotes.
3. Maitriser TVI.
4. Maitriser Maximum, minimum, liens avec la dérivée (cf tableau de variation)

Exercice 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par

$$f(x) = \frac{3x-4}{x-2}$$

1. Déterminer la fonction f' dérivée de f.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f, puis dresser le tableau de variation complet de f.

Exercice 2. *
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$$

1. Déterminer sa dérivée f' et sa dérivée seconde f''.
2. **a.** Etudier le signe de $f''(x)$ suivant les valeurs de x.
   b. En déduire le sens de variation de la dérivée f'.
3. **a.** Montrer que la dérivée f' s'annule deux fois, en -1 et en α avec $-0,3 \leq \alpha \leq -0,2$
   b. En déduire le signe de la dérivée f', puis les variations de la fonction f.

Exercice 3. *
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + \sqrt{x^2+8}$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère.

1. Démontrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}$ à l'aide du signe de $f'(x)$.
2. Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ et démontrer que $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = -2x$ et l'axe des abscisses.
3. Tracer $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal (on prendra 2 cm pour unité graphique).

Exercice 4.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Dénombrer les solutions des équations suivantes :

$$f(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = -5$$

Exercice 5. **

Afin de dénombrer les solutions de l'équation :

$$x(x^3 - 6x + 1) = -1$$

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x(x^3 - 6x + 1)$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et la dérivée seconde f'' de f.
2. Dénombrer les solutions de l'équation :

$$4x^3 - 12x + 1 = 0$$

   En donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}
3. En déduire le signe de la fonction f', puis le tableau des variations de la fonction f.
4. Conclure quant au nombre de solutions de l'équation proposée.

Exercice 6. **

Calculer en utilisant la notion de dérivée, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

Exercice 7. ***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + \mid x \mid}$$

1. Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ par 1.
2. Etudier la parité de f.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0.
4. Etudier les variations de f, en déduire que l'équation $f(x) = \lambda$ pour $\lambda \in]-1; 1[$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$