TUTORAT-SÉANCE 14

Objectifs :

1. Représentation paramétrique de droites
2. Intersection de plans, de droites et de plans, de trois plans, ect...
3. Distance d'un point à un plan.

Exercice 1. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\mathscr{D}$ passe par $A(-1;2;3)$ et $B(1;-1;1)$.
2. $\mathscr{D}$ passe par $A(5;6;7)$ et est dirigée par $\vec{d}(0;1;2)$.
3. $\mathscr{D}$ passe par $A(-1;-5;3)$ et $B(5;-1;1)$.
4. $\mathscr{D}$ passe par $A(3;-6;7)$ et est dirigée par $\vec{d}(3;-1;-2)$.

Exercice 2. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\mathscr{P}$ passe par $A(-1;2;3)$ et est orthogonal à $\vec{n}(2;3;5)$
2. $\mathscr{P}$ passe par $A(2;6;7)$, $B(-3;4;6)$ et $C(1;0;0)$.
3. $\mathscr{P}$ passe par $A(-1;-2;-3)$ et est orthogonal à $\vec{n}(0;1;2)$
4. $\mathscr{P}$ passe par $A(1;2;3)$, $B(4;5;6)$ et $C(7;8;9)$.

Exercice 3. Déterminer l'intersection éventuelle de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$ sachant qu'une représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est :

$$\begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1-2t \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

et une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est :

$$3x-2y+z=3$$

Exercice 4. On donne $A(5;0;1)$, $B(2;3;4)$, $C(1;1;1)$ et $D(0;0;3)$.
Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Exercice 5. On considère les plans $\mathscr{P}$ d'équation :$x+y-2=0$ et $\mathscr{Q}$ d'équation $-x+2y+z=0$. Déterminer l'éventuelle intersection des plans P et Q.

Exercice 6. On considère trois plans $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ dont on connaît une équation cartésienne :

$$P : 2x-y+z=2 \quad \text{et} \quad \mathscr{Q} : 4x-2y+3z=1 \quad \text{et} \quad R : x+y+z=1$$

Etudier l'intersection des plans P, Q et R.

Exercice 7. Calculer la distance du point A au plan $\mathscr{P}$:

1. $A(1;0;2)$ et $\mathscr{P} : 2x-2y=3$
2. $A(2;1;1)$ et $\mathscr{P}$ est le plan passant par $B(1;0;0)$, de vecteur normal $\vec{n}(2;3;4)$.

Nouvelle calédonie (Mars 2011)

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(-2\,;\,0\,;\,1)$, $B(1\,;\,2\,;\,-1)$ et $C(-2\,;\,2\,;\,2)$.

1. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
   (b) En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
   (c) En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x-y+2z+2=0$.
3. Soient $\mathscr{P}_1$, et $\mathscr{P}_2$ les plans d'équations respectives $x+y-3z+3=0$ et $x-2y+6z=0$.
   Montrer que les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathscr{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2 \\ y & = & -1+3t \\ z & = & t \end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$.
4. Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(1\,;\,-3\,;\,1)$ et de rayon $r=3$.
   (a) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

   Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

   (b) Etudier l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ et de la droite $\mathscr{D}$.
   (c) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathscr{S}$.

Eléments de correction (Nouvelle Calédonie Mars 2011)

1. (a) On a $\overrightarrow{AB}(3\,;\,2\,;\,-2)$, $\overrightarrow{AC}(0\,;\,2\,;\,1)$, d'où $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0+4-2=2$.
   On a $AB^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=9+4+4=17$; donc $AB=\sqrt{17}$;
   $AC^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=0+4+1=5$, donc $AC=\sqrt{5}$.

   (b) On sait que le produit scalaire peut aussi s'écrire :
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$, soit :
   $2=\sqrt{17}\times\sqrt{5}\times\cos\widehat{BAC}\iff\cos\widehat{BAC}=\dfrac{2}{\sqrt{85}}\Rightarrow\widehat{BAC}\approx 77\,°$.

   (c) L'angle $\widehat{BAC}$ n'étant ni nul, ni plat, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. On a : $(-2\,;\,0\,;\,1)$ vérifie $2x-y+2z+2=0\iff -4-0+2+2=0$ égalité vraie ;
   $(1\,;\,2\,;\,-1)$ vérifie $2x-y+2z+2=0\iff 2-2-2+2=0$ égalité vraie ;
   $(-2\,;\,2\,;\,2)$ vérifie $2x-y+2z+2=0\iff -4-2+4+2=0$ égalité vraie.
   Les coordonnées des trois points non alignés A, B et C vérifient l'équation : cette équation est donc l'une des équations du plan (ABC).

3. $\mathcal{P}_1$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}(1\,;\,1\,;\,-3)$; $\mathcal{P}_2$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_2}(1\,;\,-2\,;\,6)$.
   $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont manifestement pas colinéaires, donc les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles et distincts : ils sont donc sécants suivant une droite $\mathcal{D}$ dont les coordonnées vérifient :
   $\begin{cases} x+y-3z+3 = 0\\ x-2y+6z = 0\end{cases}$ soit en posant $z=t$:
   $$\begin{cases} x+y+3 = 3z\\ x-2y = -6z\\ z = t\end{cases}\iff\begin{cases} x+y+3 = 3t\\ x-2y = -6t\\ z = t\end{cases}\iff$$
   (par différence des deux premières équations $\begin{cases} 3y+3 = 9t\\ x-2y = -6t\\ z = t\end{cases}\iff$
   $$\begin{cases} y = 3t-1\\ x = 2y-6t\\ z = t\end{cases}\iff\begin{cases} y = 3t-1\\ x = 6t-2-6t\\ z = t\end{cases}\iff\begin{cases} x = -2\\ y = -1+3t\\ z = t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

4. $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(0\,;\,3\,;\,1)$ et le plan (ABC) apour vecteur normal $\overrightarrow{v}(2\,;\,-1\,;\,2)$. Comme $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-3+2=-1\neq 0$, ces vecteurs ne sont pas orthognaux, donc la droite $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle au plan (ABC).
   Le point commun est tel que $x=-2,\ y=3t-1,\ z=t$ et $2x-y+2z+2=0\iff -4-3t+1+2t+2=0\iff -1=t$.
   Le point commun à $\mathcal{D}$ et au plan (ABC) a pour coordonnées $(-2\,;\,-4\,;\,-1)$.

5. (a) $M(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathcal{S}\iff \Omega M^2=3^2=9\iff (x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9\iff x^2+y^2+z^2-2x+6y-2z+2=0.$

   (b) $M(-2\,;\,3t-1\,;\,t)\in\mathcal{S}\iff (-2)^2+(3t-1)^2+t^2-2\times(-2)+6(3t-1)-2t+2=0\iff 4+9t^2+1-6t+t^2+4+18t-6-2t+2=0\iff 10t^2+10t+5=0\iff 2t^2+2t+1=0.$
   On a $\Delta=4-8=-4<0$: il n'y a pas de solution : conclusion la droite $\mathcal{D}$ ne coupe pas la sphère.

   (c) Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$, c'est démontrer que la distance du point Ω au plan (ABC) est égal au rayon de la sphère.
   Or $d(\Omega,\ (ABC))=\dfrac{|2\times 1-(-3)+2\times 1+2|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{2+3+2+2}{\sqrt{9}}=\dfrac{9}{3}=3=r.$