TUTORAT-SÉANCE 11

Objectifs :

1. Probabilités conditionnelles.
2. Utiliser la formule des probabilités totales à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Utiliser les coefficients binomiaux pour dénombrer.

Exercice 1. Marcel est distrait. Quand il part travailler, il oublie parfois de s'habiller et prend le tramway entièrement dévêtu. Quand il a voyagé la veille nu, il voyage nu une fois sur cinq le jour même ; sinon, une fois sur deux.
On note N_n l'événement « il voyage le $n^{\text{ième}}$ jour nu »et p_n sa probabilité.

1. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

Réponse : $p_{n+1} = 1/2 - 3p_n/10$

2. On pose $u_n = p_n - 5/13$
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n, puis de u_1 et n.

Réponse : $u_n = u_1(-3/10)^{n-1}$

   (b) Exprimer alors p_n en fonction de n.
   (c) Montrer que la suite (p_n) est convergente et calculer sa limite.

Réponse : $5/13$

Exercice 2.

1. Des études morphologiques de la Vénus de Milo montrent qu'il y a cinq chances sur sept pour qu'elle soit droitière et deux chances sur sept pour qu'elle soit gauchère. Si elle est droitière, il y a trois chances sur cinq pour qu'elle épluche des carottes et deux chances sur cinq pour qu'elle dénoyaute des olives. Si elle est gauchère, il y a une chance sur deux pour qu'elle épluche des carottes et une chance sur deux pour qu'elle dénoyaute des olives.
   Calculer la probabilité pour qu'elle dénoyaute des olives.

Réponse : $3/7$

2. Les noyaux trouvés sur le site archéologique de la statue permettent d'affirmer sans hésiter qu'elle dénoyaute des olives.
   Calculer la probabilité pour qu'elle soit gauchère.

Réponse : $1/3$

Exercice 3. Rastatopoulos, célèbre poète grec du XX^e siècle avant GC, nous rapporte l'anecdote suivante.
La Vénus de Milo rangeait ses olives dans trois amphores. Dans la première, il y avait 30 olives vertes et 20 olives noires. Les deux autres amphores contenaient, l'une quatre olives vertes (Rastatopoulos ne sait plus laquelle), l'autre quatre olives noires (Rastatopoulos ignore évidemment de quelle amphore il s'agit).
Un jour d'éclipse totale du soleil, la Vénus de Milo prend, au hasard, une olive de la première amphore, puis la place dans une des deux autres amphores. Elle prend ensuite dans celle-ci une olive au hasard et le soleil réapparait : l'olive est verte.
Calculer la probabilité pour que la dernière amphore visitée contienne plusieurs olives vertes.
On pourra considérer les événements suivants

- V_1 *: « la première olive est verte »*
- A *: « la deuxième amphore contenait les quatre olives vertes »*
- V_2 *: « la deuxième olive est verte »*

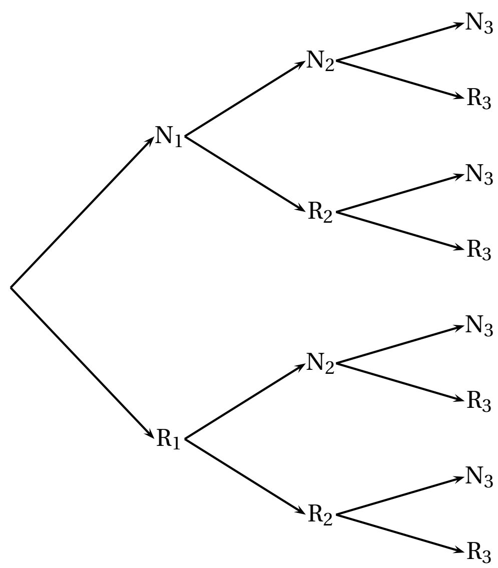
Réponse : $23/26$

Exercice 4. On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.
On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).
Un joueur fait une partie en deux étapes :
Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.
Deuxième étape :
• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.
A la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).
On définit les évènements suivants :
D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 »
D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».
A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. (a) Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$
   (b) Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.
2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

Exercice 5. On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.
L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.
Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.
Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i »(respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. (a) Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.
   (b) En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.
   (c) Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.
3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.
4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?
5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 6. *Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant à la réponse choisie.*
Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

   a. $0,4$ **b.** $0,75$ **c.** $\dfrac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

   a. $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$

3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est

   a. $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

   a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

   a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$

6. Le lecteur est venu 3 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

   a. $1-(0,25)^3$ **b.** $3\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^3$

Exercice 7.

1. Donnez une expression simple de $\binom{n}{0}$, de $\binom{n}{1}$, de $\binom{n}{n}$, de $\binom{n}{n-1}$. Utilisez des simplifications pour calculer à la main $\binom{20}{3}$.
2. On donne $\binom{13}{5}=1287$ et $\binom{13}{6}=1716$. Calculez alors à la main $\binom{13}{8}$ et $\binom{14}{9}$

Exercice 8. Une main au poker est constituée de 5 cartes tirées d'un jeu de 52 cartes.
Combien y a-t-il de mains contenant des carrés (XXXXY) ? des fulls (XXXYY) ? des brelans (XXXYZ) ? des doubles paires (XXYYZ) ? des paires (XXYZA) ?
Deux lettres identiques (par exemple XX) correspondent à deux cartes de même hauteur (par exemple deux dames).

Réponse : 624 carrés, 3744 fulls, 54912 brelans
123552 doubles paires, 1098240 paires.

Exercice 9. On considère 7 boules numérotées de 1 à 7.

1. On en tire simultanément 3. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit k un entier vérifiant $3\leqslant k\leqslant 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?
3. En déduire une expression de $\sum_{k=3}^{7}\binom{x-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.