TUTORAT-SÉANCE 10

Objectifs :

1. Révisions type BAC.
2. Suites et intégrales.
3. Calcul d'intégrales.

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes : (dans certains cas il pourra être utile d'utiliser une IPP)

1. $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^x t\sin t dt$
4. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$

Exercice 2. Soit f et g deux fonctions définies, pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x^2+2 \qquad \text{et} \qquad g(x)=x^2-2x-2$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g dans $(O;\vec{i},\vec{j})$, un repère orthonormé du plan d'unité 3 cm.

1. Représenter $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur un même graphique.
2. Etudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$ sur $[-1;1]$.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}'$ (en cm^2) de la partie du plan délimitée par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x=-1$ et $x=2$.

Exercice 3. **Amérique du nord 2009**

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a<b$.

- Si $u\geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x+\beta\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a<b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ \text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n=\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

1. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant f(x)\leqslant 1$.
   (b) En déduire que $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\leqslant u_0\leqslant 1$.
2. Calculer u_1.
3. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0\leqslant u_n$.
   (b) Etudier les variations de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n\leqslant\dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).

Eléments de correction (Amérique du nord 2009)

Partie A : Restitution organisée de connaissances
Voir le cours pour les détails, voici la démarche :
Par linéarité de l'intégrale (second rappel) : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
Or, pour tout x de $[a\,;\,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, donc $f-g \leqslant 0$ et le premier rappel assure le résultat.
Partie B

1. (a) f est la composée de la fonction $x \longmapsto -x^2$, décroissante sur $[0\,;\,1]$, suivie de la fonction exponentielle croissante sur $\mathbb{R}$. f est donc décroissante sur $[0\,;\,1]$.
On peut bien sur argumenter sur la dérivabilité de f puis le signe de sa dérivée.
On en déduit que, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(0) \Longleftrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant 1$
   (b) Par croissance de l'intégrale, on déduit de la question précédente :
$\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_0 \leqslant 1$
2. $u_1 = \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
On pose $u(x) = -x^2$, ainsi $u'(x) = -2x$ et $(u'\mathrm{e}^u)(x) = -2xf(x) \Longleftrightarrow xf(x) = -\frac{1}{2}u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.
On a donc : $u_1 = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2\mathrm{e}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.
3. (a) Comme la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, pour tout x de $[0\,;\,1]$, $x^n f(x) \geqslant 0$. Enfin, comme les bornes sont dans le bon ordre, par positivité de l'intégrale, on a bien le résultat.
   (b) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 x^{n+1}f(x) - x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (x-1)x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ car la fonction intégrée est clairement négative sur $[0\,;\,1]$.
La suite (u_n) est décroissante.
   (c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.
4. (a) D'aprè !s la question 1. a., pour tout x de $[0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant 1$, par croissance de l'intégrale :
$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Longleftrightarrow \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$
   (b) D'après les questions 3. a. et 4. a., on a $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$
Avec le théorème des gendarmes la suite converge vers 0.

Exercice 4. **Polynésie Juin 2009**
Le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$.
Partie A
La courbe $(\mathscr{C})$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
La courbe $(\mathscr{C})$ passe par les points O et $\mathrm{A}\left(1\,;\,\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)$ et, sur $[0\,;\,1]$, elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{e}}$
2. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$

Partie B
On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$.
Etablir que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
3. (a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

(b) En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

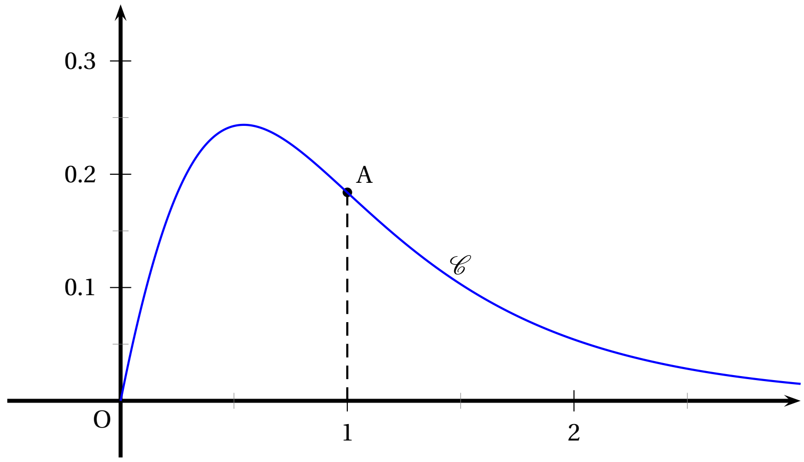
4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.

(c) En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.



Eléments de correction (Polynésie 2009)

Partie A

1. f' étant définie et continue sur $[0\,;\,1]$ est intégrable sur cet intervalle et
$\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_0^1 = f(1) - f(0) = \frac{1}{2\mathrm{e}} - 0 = \frac{1}{2\mathrm{e}}$.
2. On sait que sur $[0\,;\,1]$, la courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus du segment [OA] ; l'intégrale de f sur $[0\,;\,1]$ égale à l'aire de la surface limitée par $(\mathscr{C})$ et les droites $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$, est supérieure à l'aire du triangle OIA (avec $\mathrm{I}(1\,;\,0)$).
Cette aire est égale à $\dfrac{\mathrm{OI} \times \mathrm{IA}}{2} = \dfrac{1 \times \frac{1}{2\mathrm{e}}}{2} = \dfrac{1}{4\mathrm{e}}$.
Donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{4\mathrm{e}}$.

Partie B

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x} = 0$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
De plus $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
L'axe des abscisses est donc asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.
2. g fonction polynôme est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.
Or $3x^2+2x+1 = 3\left(x^2 + \dfrac{2}{3}x\right) + 1 = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{3} + 1 = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \dfrac{2}{3} > \dfrac{2}{3} > 0$
Conclusion $g'(x) > 0 \Rightarrow g$ est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
On a $g(0) = -1$ et $g(1) = 2$. Comme la fonction est croissante sur $[0\,;\,1]$, l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique sur $[0\,;\,1]$, donc sur $[0\,;\,+\infty[$.

3. (a) f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u = x\mathrm{e}^{-x}$ et $v = x^2+1$. De $u' = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$, $v' = 2x$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, on en déduit que
$f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}(1-x)\left(x^2+1\right) - x\mathrm{e}^{-x}\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$ qui est du signe du numérateur donc de $\mathrm{e}^{-x}(1-x)\left(x^2+1\right) - x\mathrm{e}^{-x}\times 2x = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2+1-x^3-x-2x^2\right) =$
$\mathrm{e}^{-x}\left(-x^3-x^2-x+1\right)$ ou encore de $-x^3-x^2-x+1 = -\left(x^3+x^2+x-1\right) = -g(x)$.
f' et g ont donc des signes contraires.
   (b) On a vu que sur $[0\,;\,\alpha]$, $g(x) < 0$, donc $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[0\,;\,\alpha]$ et sur $[\alpha\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

4. (a) Il est évident que quel que soit $x \in [0\,;\,+\infty[$, $(x-1)^2 \geqslant 0 \iff x^2+1-2x \geqslant 0 \iff x^2+1 \geqslant 2x \iff \dfrac{1}{2} \geqslant \dfrac{x}{x^2+1} \iff \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (b) On a $x \geqslant 0 \iff -x \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^0$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \iff \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1} \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$.
En posant $u(x) = x^2+1$, u est dérivable et $u'(x) = 2x$.
Donc $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'}{u}$.
On a donc $u_n = \displaystyle\int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{2n} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. (d'après la question **4. a.**)
Or $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}\right]_n^{2n} = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{2n} + \mathrm{e}^{-n}\right]$.
Conclusion $u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.
   (c) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0$, on en déduit par application du théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 5. **France sept. 2008**

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par

$$\mathrm{J}_n = \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. *Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par :

$$\mathrm{I}_n = \int_1^n (t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Justifier que, pour tout $t \geqslant 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.
   (b) En déduire que $\mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{I}_n$.
   (c) Calculer I_n en fonction de n. En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).
   (d) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

Eléments de correction (France 2008)

---

1. On calcule $\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n = \displaystyle\int_1^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.
Pour $t \in [n\,;\,n+1]$, $\sqrt{1+t} > 0$ et $\mathrm{e}^{-t} > 0$.
L'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle où $n < n+1$ est positive, donc $\mathrm{J}_{n+1} - \mathrm{J}_n \geqslant 0 \iff \mathrm{J}_{n+1}\mathrm{J}_n \geqslant \mathrm{J}_n$, ce qui montre que la suite (J_n) est croissante.

2. (a) Posons $u = t+1$, donc $u \geqslant 2$; or $0 \leqslant \sqrt{u} \leqslant u$, sur $[2\ ;\ +\infty]$, car $0 \leqslant u \leqslant u^2$.
Remarque : en fait relation est vraie pour $t \geqslant 0$.

(b) $\sqrt{t+1} \leqslant t+1 \iff \sqrt{t+1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant (t+1)\mathrm{e}^{-t}$ ce qui entraîne que $\displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^n \mathrm{e}^{-t}(1+t)\,\mathrm{d}t \iff \mathrm{J}_n \leqslant \mathrm{I}_n$.

(c) Intégrons par parties :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(t) & = & t+1 \\ \mathrm{d}v(t) & = & \mathrm{e}^{-t} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{d}u(t) & = & 1 \\ v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Les fonctions dérivées ci-dessus étant continues $\mathrm{I}_n = \left[-(t+1)\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n - \displaystyle\int_1^n -\mathrm{e}^{-t}dt = \left[-(t+1)\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n + \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n = \left[-(t+2)\mathrm{e}^{-t}\right]_1^n = -(n+2)\mathrm{e}^{-n} + 3\mathrm{e}^{-1}$.
Comme $(n+2)\mathrm{e}^{-n} \geqslant 0$, I_n est donc majorée par $3\mathrm{e}^{-1}$

(d) L'inégalité démontrée au **b.** montre que $\mathrm{J}_n \leqslant 3\mathrm{e}^{-1}$.
La suite (J_n) est donc majorée et croissante : elle a donc une limite inférieure ou égale à $3\mathrm{e}^{-1}$.