R.O.C : Restitution Organisée des Connaissances

Terminale S
Extrait d'annales

Table des matières

I) Géométrie

I-1 Nombres Complexes

Proposition 1 :

Prrequis

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - bi$.

Questions

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Preuve

1. $$\overline{z \times z'} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{ac - bd + i(bc+ad)} = ac + bd - i(bc+ad)$$
   D'autre part,
   $$\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(c - id) = ac - bd - i(bc + ad)$$
2. On vient de démontrer que la propriété pour $n = 2$
   Supposons que $\overline{z^{n-1}} = (\overline{z})^{n-1}$, on a alors :
   $$\overline{z^n} = \overline{z^{n-1} \times z} = \overline{z^{n-1}} \times \overline{z} = (\overline{z})^{n-1} \times \overline{z} = (\overline{z})^n$$

Proposition 2 :

1. Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
3. Démontrer que pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Preuve

1. et 2. Notons $z = x + iy$ avec x et y deux réels. Ainsi :
   $$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\Re e(z) \text{ et } z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\Im m(z)$$
   On en déduit immédiatement que :
   $$z \text{ est réel} \iff \Im m(z) = 0 \iff z - \overline{z} = 0 \iff z = \overline{z}$$
   $$z \text{ est imaginaire pur} \iff \Re e(z) = 0 \iff z + \overline{z} = 0 \iff z = -\overline{z}$$
2. $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y = x^2 + y^2 = |z|^2$

Proposition 3 :
Le plan complexe est rapporté à un repre orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a,\ b,\ c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.
On rappelle que $\left(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)=\arg(b-a)\quad[2\pi]$.
Montrer que $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)\quad[2\pi]$.

Preuve

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)&=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{e_1}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AC}\right)=-\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{AC}\right)\\&=-\arg(b-a)+\arg(c-a)=\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\qquad[2\pi]\end{aligned}$$

Proposition 4 :
Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
i. Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl}|z|&=&r\\ \arg z&=&\theta\ [2\pi]\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}z&=&r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\\ r&>&0\end{array}\right.$$

ii. Pour tous nombres rels a et b :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\cos(a+b)&=&\cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin(a+b)&=&\sin a\cos b+\sin b\cos a\end{array}\right.$$

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|zz'|=|z|\,|z'|\ \text{ et }\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')\ \ [2\pi]$$

Preuve

$$|zz'|^2=zz'\overline{zz'}=zz'\overline{z}\overline{z'}=z\overline{z}z'\overline{z'}=|z|^2|z'|^2$$

Comme un module est positif on obtient : $|zz'|=|z||z'|$
Soit $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$, alors

$$zz'=rr'[(\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition (vu en première), vous en déduisez que

$$zz'=z=rr'(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital : $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')[2\pi]$

Proposition 5 :

Le plan complexe est rapporté à un repre orthonormal direct $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.
Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta\ 2k\pi \text{ prs } (k\in\mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

1. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
   Traduire les relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.
2. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

Preuve

1. La relation (1) se traduit par $|z'-\omega| = |z-\omega|$ ou encore $\dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = 1$

   La relation (2) se traduit par : $arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta[2\pi]$
2. Le nombre complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ a pour module 1 et pour argument θ, on peut donc écrire, en utilisant la forme exponentielle, que :
   $$\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$$
   On en déduit alors que : $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega) \Longleftrightarrow z' = e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$

Proposition 6 :

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C.
   Alors $\left|\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right| = \dfrac{CB}{CA}$ et $\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right) \quad (2\pi)$.
2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel :
   $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z'-\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z-\omega).$$

Preuve

On a : $\Omega M = \Omega M' \Longleftrightarrow \dfrac{\Omega M}{\Omega M'} = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{|z'-\omega|}{|z-\omega|} = 1$

De plus $\arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M'},\ \overrightarrow{\Omega M}\right) \quad (2\pi)$, par conséquent le nombre complexe $\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}$ a pour module 1 et pour argument θ, on peut donc écrire, en utilisant la forme exponentielle, que :

$$\frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta}$$

On en déduit alors que : $z'-\omega = e^{i\theta}(z-\omega)$

I-2 Espace (Produit Scalaire et Barycentre)

Proposition 7 :

1. Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r, démontrer que $\mathscr{S}$ admet une équation de la forme :
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$
2. Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[AB]$ avec $A(0; 0; 1)$ et $B(1; 2; 3)$. Préciser son centre Ω et son rayon r.

Solutions :

1. $M(x; y; z) \in \mathscr{S} \iff \Omega M^2 = r^2 \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.
2. Le centre Ω de cette sphère a pour coordonnées $(0,5; 1; 2)$. De plus le rayon
$$r = \Omega A = \sqrt{0,5^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2,25} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$
D'où :
$$\mathscr{S} : (x - 0,5)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{9}{4}$$

Proposition 8 :

Soit A le point de coordonnées $(x_a; y_a; z_a)$ et $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.

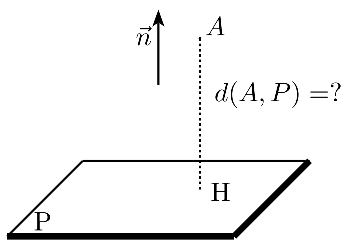
1. Donner les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}$ au plan $\mathscr{P}$.
2. On note $H(x_H; y_H; z_H)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$ déterminer de deux manières différentes $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}$.[a]
3. Montrer finalement que :
$$d(A; \mathscr{P}) = \frac{| ax_A + by_A + cz_A + d |}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

a. On utilisera la définition dans un premier temps, puis la formule faisant intervenir le cosinus

Solutions :

1. $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à $\mathscr{P}$.

2. Notons $H(x_H; y_H; z_H)$ le projeté orthogonal de A sur P.
Nous savons que le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est normal à P.
Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.
Il existe un réel t tel que :
$$\overrightarrow{AH} = t\vec{n}$$
Par conséquent
$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = \pm AH \times ||\vec{n}||$$
Mais encore, (notons que $H \in P \implies ax_H + by_H + cz_H + d = 0$)
$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = a(x_H - x_A) + b(y_H) - y_A) + c(z_H - z_A) = -(ax_A + by_A + cz_A + d)$$



3. Au final :
$$AH \times ||\vec{n}|| = |ax_A + by_A + cz_A + d| \iff AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{||\vec{n}||} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Proposition 9 :

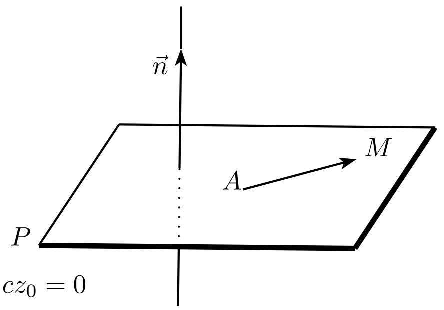
On considère l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ Montrer l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ et un point $A(x_0;y_0;z_0)$ est de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

Preuve

On a, pour tout point M du plan P, désiré

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$



Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, alors $M\in P$ On a donc le résultat suivant :

$$M(x;y;z)\in P \iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

i.e

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \iff ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$$

En posant $d=-ax_0-by_0-cz_0$ on obtient le résultat

II) Analyse

II-1 Suites

Proposition 10 :

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.
Définition : Deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est dcroissante et la diffrence des deux converge vers 0.
Propriété : Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.
Propriété : Toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Preuve

On considère deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes, avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
Montrons tout d'abord que $u_n \leq v_n$, pour cela notons $w_n = v_n - u_n$, on a :

$$w_{n+1} - w_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$$

Par conséquent (w_n) est une suite décroissante, on a donc pour tout $m > n$, $w_m \leq w_n$, et par passage à la limite lorsque $m \longrightarrow +\infty$ on obtient :

$$0 \leq w_n \Longleftrightarrow u_n \leq v_n$$

Et aussi :

$$u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

Comme (u_n) est une suite croissante majorée, elle converge vers un certain réel l.
De même comme (v_n) est une suite décroissante minorée, elle converge vers un certain réel l'
Enfin $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = l' - l = 0$
Par unicité de la limite on obtient : $l = l'$

Proposition 11 :

Si une suite (u_n) converge alors sa limite l est unique

Preuve

Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite (u_n) admet deux limites l_1 et l_2 telles que $l_1 < l_2$.
Notons $d = l_2 - l_1$ Par définition, l'intervalle ouvert I_1 de centre l_1 et de rayon $\dfrac{d}{2}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, de même l'intervalle ouvert I_2 de centre l_2 et de rayon $\dfrac{d}{2}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, par conséquent $I_1 \cap I_2$ est un intervalle contenant tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Or, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, ce qui est absurde
Par conséquent la suite (u_n) ne peut admettre qu'une limite.

Proposition 12 :

Soit (u_n) une suite définie par : $u_n = q^n$ (avec $q > 0$) alors :

- Si $q \in [0; 1[$ la suite (u_n) est convergente vers 0
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et donc convergente vers 1
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est divergente (vers $+\infty$).

Pour cette démonstration nous allons utiliser le résultat suivant [1]

Lemme 1 : Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Preuve du lemme

Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété $(1+x)^n \geq 1+nx$ est vraie

$\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont évidentes

Montrons que $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

On suppose donc que $(1+x)^n \geq 1+nx$ et on souhaite montrer que : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

On a alors, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& (1+x)^n \geq 1+nx \\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \qquad \text{en multipliant membre à membre par } (1+x) > 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x+nx^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \qquad \text{puisque } nx^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Résumons : On a donc $\mathscr{P}(0)$ mais aussi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$, par conséquent on a : pour tout réel x positif et pour tout entier n, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Preuve du théorème

- $q > 1$

  Posons $x = q - 1$, on a alors $x > 0$, et d'après l'inégalité de Bernoulli :

  $$q^n = (1+x)^n \geq 1+nx$$

  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+nx = +\infty$, par comparaison on en déduit :

  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

  La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$
- $q \in [0; 1[$

  Si $q = 0$ le résultat est évident, sinon posons $q' = \dfrac{1}{q}$, dans ce cas $q' \in]1; +\infty[$

  D'après le résultat précédent :

  $$\lim_{n\to+\infty} q'^n = +\infty$$

  Par passage à l'inverse nous obtenons donc :

  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

  La suite (u_n) converge donc vers 0
- $q = 1$, le résultat est alors évident.

1. un résultat servant une démonstration est usuellement appelé Lemme

Proposition 13 :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.
« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».
Démontrer le théoréme suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Preuve

Soit A un réel, puisque (u_n) est une suite non majorée alors il existe un certain entier, disons n_0 tel que :

$$u_{n_0} \geq A$$

Puisque (u_n) est croissante, alors pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$u_n \geq u_{n_0} \geq A$$

ainsi pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang n_0, supérieurs à A ce qui, par définition, nous permet de conclure que (u_n) tend vers $+\infty$

II-2 Exponentielle

Proposition 14 :

PRÉ-REQUIS
Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où C est une constante réelle. Le but de cette question est de démontrer l'existence et l'unicité de la solution z de l'équation différentielle (E'$_\lambda$) :
$z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = -\frac{1}{\lambda}$$
est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$.
2. Montrer que z est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$ est équivalent à $z - f$ est solution de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$.
3. En déduire l'ensemble des solutions z de l'équation différentielle $z' = -(\lambda z + 1)$.
4. En déduire l'existence et l'unicité de la solution de (E'$_\lambda$) dont on donnera l'expression z_0

Preuve

1. On pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$f'(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad -\left(\lambda \times \frac{-1}{\lambda} + 1\right) = 0$$
Par conséquent f est solution de $z' = -(\lambda z + 1)$.
2. On a la série d'équivalence suivante :
$$\begin{array}{ll} & z \text{ est solution de } z' = -(\lambda z + 1) \\ \Longleftrightarrow & z' = -(\lambda z + 1) \\ \Longleftrightarrow & z' - f' = -(\lambda z + 1) - [-(\lambda f + 1)] \quad \text{en effet on vient de démontrer que} f' = -(\lambda f + 1) \\ \Longleftrightarrow & (z - f)' = -\lambda z + \lambda f \\ \Longleftrightarrow & (z - f)' = -\lambda(z - f) \\ \Longleftrightarrow & z - f \text{ est solution de l'équation différentielle } y' = -\lambda y \end{array}$$
3. D'après la première question, il existe au moins une solution à l'équation différentielle $z' = -(\lambda z + 1)$, de plus on vient de montrer que pour z solution de cette équation différentielle, la fonction $z - f$ est solution de $y' = -\lambda y$, équation dont on connaît les solutions d'où :
$$(z - f)(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x}$$
où C est une constante.
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$z(x) = C\mathrm{e}^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}$$
Si on ajoute, de plus, la condition $z(0) = 1$ alors :
$$1 = C - \frac{1}{\lambda} \Longleftrightarrow C = 1 + \frac{1}{\lambda}$$
Ainsi (E'$_\lambda$) admet une unique solution qui est
$$z_0(x) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$$

Proposition 15 :

On suppose connu le résultat suivant :
La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique fonction φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.
Soit a un réel donné.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$. Montrer que h est une fonction constante. (On montrera $h' = 0$)
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

Preuve

1. Montrons que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.
   On a
   $$f'(x) = ae^{ax} = af(x)$$
   Par conséquent f est solution de l'équation $y' = ay$.
2. Soit g une solution de l'équation $y' = ay$. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = e^{-ax}(g'(x) - ag(x)) = e^{-ax} \times 0 = 0$$
   Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = K$ avec $K \in \mathbb{R}$.
3. D'après la question précédente si g est une solution de $y' = ay$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$
   $$g(x)e^{-ax} = K \iff g(x) = Ke^{ax}$$

Proposition 16 :

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.
On suppose connu le résultat suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad e^x \geq x$$

1. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$. (On étudiera la fonction g pour cela).
2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Preuve

1. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2}$.
   Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$ on a :
   $$g'(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x \geq 0$$
   Ainsi la fonction g est strictement croissante et donc pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$:
   $$g(x) \geq g(0) = 1 \geq 0 \Longrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{2} \Longrightarrow \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$$
2. Comme $\dfrac{x}{2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ on en déduit immédiatement par comparaison que :
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Proposition 17 :

1. Montrer que $e^x > x$, pour cela étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.
2. En utilisant l'égalité précédent pour $X = \dfrac{x}{2}$ démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a
$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$$
3. En déduire la limite de $\dfrac{e^x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Preuve

1. Montrons pour cela que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :
$$e^x \geq x$$
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^x - x$$
f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - 1$
$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow e^x = 1 \Longleftrightarrow e^x = e^0 \Longleftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Par conséquent $f(x) \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ i.e :
$$e^x - x \geq 1 > 0 \Longrightarrow e^x > x$$

2. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$:
$$\begin{aligned} & e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2} \\ \Longleftrightarrow \quad & \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq \frac{x^2}{4} \\ \Longleftrightarrow \quad & e^{\frac{2x}{2}} \geq \frac{x^2}{4} \\ \Longleftrightarrow \quad & e^x \geq \frac{x^2}{4} \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4} \end{aligned}$$

3. Par comparaison, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ on en déduit que :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

II-3 Logarithme népérien

Proposition 18 :

Prérequis : On rappelle que pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$ on a :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \text{et que} \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Preuve

On a donc :

$$0 = \ln 1 = \ln\left(\frac{b}{b}\right) = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

Puis :

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

Proposition 19 :

On suppose connue la propriété :
« Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.

Preuve

en appliquant la propriété à $\ln m = \ln\left(\sqrt{m} \times \sqrt{m}\right)$, on obtient :

$$\ln m = \ln\sqrt{m} + \ln\sqrt{m} = 2\ln\sqrt{m} \Longleftrightarrow \ln\sqrt{m} = \frac{1}{2}\ln m \qquad (\text{avec } m > 0).$$

Proposition 20 :

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

   On pourra effectuer un changement de variable en posant $X = e^x$

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

Preuve

1. Commencons par démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ en utilisant le fait que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \iff \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

   Posons $X = e^x \iff \ln X = x$ on a alors

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

2. On en déduit alors pour $n \geq 2$ que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x} = 0$$

   car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Proposition 21 :

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x, \ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

1. On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par
$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$
   (a) Etudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
   (c) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :
$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$
En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n.

On posera $X = x^{\frac{1}{n}}$ et on en déduire que $\ln X = \dfrac{\ln x}{n}$

Preuve

1.
$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$
   (a) La fonction est une différence de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, elle est donc dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$ qui est du signe du numérateur puisque $x > 0$.
   $f'(x) = 0 \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$;
   $f'(x) < 0 \iff 0 < x < 4$; f est décroissante sur cet intervalle
   $f'(x) > 0 \iff x > 4$; f est croissante sur cet intervalle.
   Il en résulte que f a un minimum pour $x = 4$ et $f(4) = \sqrt{4} - \ln 42 - 2\ln 2 \approx 0,62$.
   (b) Le minimum de f étant supérieur à zéro, $f(x) > 0$ quel que soit $x \in]0\ ;\ +\infty[$.
   Donc $f(x) > 0 \iff \sqrt{x} - \ln x \iff \sqrt{x} > \ln x \iff \dfrac{\sqrt{x}}{x} > \dfrac{\ln x}{x} \iff \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$, car $x > 0$.
   (c) Comme $\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, on obtient par application du théorème des « gendarmes » que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2.
$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$
On peut écrire $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\ln x^{n\times\frac{1}{n}}}{x^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n}{x^{\frac{1}{n}}} = n\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right)}{x^{\frac{1}{n}}}$.
En posant $X = x^{\frac{1}{n}}$, $f_n(x) = n\dfrac{\ln X}{X}$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty$ et par composition, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$
(d'après la question précédente) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

II-4 Intégration

Proposition 22 :

On supposera connus les résultats suivants :
Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Preuve

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a\ ;\ b]$ Pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$ donc $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
$\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b [g(x)-f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ soit $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 23 :

Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Preuve

On sait que pour tout $t \in [a;b]$ on a :

$$(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$$

En intégrant membre à membre, sur le segment $[a;b]$, on obtient :

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Ainsi :

$$[u(t)v(t)]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

i.e :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

III) Probabilités

III-1 Probabilités discrètes

Proposition 24 :

Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Soient A et B deux événements associés à une expérience aléatoire

1. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.
2. Démontrer que, si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les événements $\overline{A}$ et B le sont également.

Preuve

1. On a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$, et il s'agit d'une réunion disjointe, par conséquent :

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

2. Comme A et B sont indépendants alors

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Par conséquent, en utilisant 1.

$$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$$

Proposition 25 :

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Preuve

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!p + (n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)![p+n-p]}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

III-2 Probabilités continues

Proposition 26 :

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
2. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

Preuve

1. On a, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 + e^{-\lambda t} - 1 = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

2. Soit s un réel strictement positif on a :

$$P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P\left((X > t) \cap (X > t+s)\right)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

Ainsi X suit bien une loi de durée sans vieillissement.