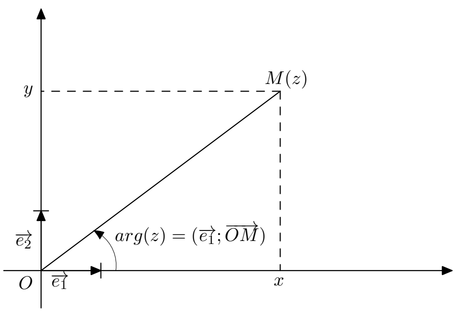
Aide mémoire sur les complexes

On considère deux nombres comlexes $z \neq 0$, $z' \neq 0$ de forme algébriques respectives $x + iy$ et $x' + iy'$, et $n \in \mathbb{Z}$.

Soient $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ quatre points, distincts deux à deux, du plan complexe, muni d'un repère orthonormé.



Remarque : On note que

$$\boxed{z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

où $r = |z| = OM$

Propriété 1 :

1. $z + \overline{z} = 2\Re\mathrm{e}(z)$
2. $z - \overline{z} = 2i\Im\mathrm{m}(z)$
3. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
4. $\overline{-z} = -\overline{z}$
5. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
6. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
7. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ (avec $z' \neq 0$)

Propriété 2 :

1. $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ ou encore $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}|$
3. $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
5. $|z + z'| < |z| + |z'|$ car $z \neq 0$ et $z' \neq 0$

Propriété 3 :

1. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \quad [2\pi]$
2. $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$
3. $\arg(-\overline{z}) = \pi - \arg(z) \quad [2\pi]$
4. $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$
5. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$
6. $\arg(z^n) = n \times \arg(z) \quad [2\pi]$

Critères pour qu'un nombre complexe soit réel (resp. imaginaire pur)

– $z \neq 0$ est réel si et seulement si :

$$\Im\mathrm{m}(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad \arg(z) = 0 \quad [\pi]$$

– $z \neq 0$ est un imaginaire pur si et seulement si :

$$\Re\mathrm{e}(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = -\overline{z} \quad \Longleftrightarrow \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

Propriété 4 :

L'équation $x^2 = a$ possède deux solutions dans $\mathbb{C}$:

– Si $a \geq 0$ ce sont les réels suivants : $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

– Si $a < 0$, ce sont les imaginaires purs conjugués suivants : $x = i\sqrt{-a}$ ou$x = -i\sqrt{-a}$

Théorème 1 :

L'équation $ax^2+bx+c=0$ avec $a\neq 0$, b et c réels possède (une ou) deux solutions dans $\mathbb{C}$:

– Si $\Delta\geq 0$, ce sont les réels suivants :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

– Si $\Delta<0$, ce sont les complexes conjugués suivants :

$$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Formes algébrique et trigonométrique

$$\left\{\begin{array}{l} x=|z|\cos\theta \\ y=|z|\sin\theta \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{l} |z|=\sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \text{ tel que } \cos\theta=\dfrac{x}{|z|} \text{ et } \sin\theta=\dfrac{y}{|z|} \end{array}\right.$$

Remarque : On pourra trouver la valeur de nouveaux sinus et cosinus, en identifiant les écritures algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe.

Calculs avec les affixes

Soit G le barycentre de $(A;\alpha),(B;\beta)$ (avec $\alpha+\beta\neq 0$) et I le milieu de $[AB]$. Alors :

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A \qquad z_I=\frac{z_A+z_B}{2} \qquad z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}$$

$$AB=|z_B-z_A| \qquad \left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)=\arg(z_B-z_A)\quad[2\pi]$$

$$\left|\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right|=\frac{CD}{AB} \qquad \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\quad[2\pi]$$

Alignement et droites parallèles

$$\text{Les points } A,\ B \text{ et } C \text{ sont alignés} \iff \arg\left(\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)=0\,[\pi] \iff \frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\in\mathbb{R}$$

$$(AB)//(CD) \iff \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=0\,[\pi] \iff \frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$$

$$(AB)\perp(CD) \iff \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff \frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in i\mathbb{R}$$

Théorème 2 :

1. La translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $z_{\vec{u}}$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que : $z' = z + z_{\vec{u}}$
2. L'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que
$$z' - \omega = k(z - \omega)$$
3. La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ transforme un point $M(z)$ en un point $M'(z')$ tel que
$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

Méthode pour reconnaître un transformation

Lorsqu'on a une transformation f du plan dont l'écriture complexe est du type $z' = az + b$ $(a \neq 0)$, on commence par rechercher son éventuel point fixe.

- Si $a = 1$ et $b = 0$, alors f est l'identité (tous les points du plan sont fixes)
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$, il n'y a pas de point fixe et f est une translation
- Si $a \neq 1$, il y a un unique point fixe d'affixe ω.
  Dans ce cas, on cherche à exprimer $z' - \omega$ en fonction de $z - \omega$.
  - Si $a \in \mathbb{R}$ alors f est une homothétie de rapport a et de centre ω
  - Si a est un complexe de module 1 $\left(a = e^{i\theta}\right)$, alors f est une rotation d'angle θ.

Ensemble des points $M(z)$ tels que :

$\lvert z - z_A \rvert = k$	$\Longleftrightarrow$	$AM = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)	:	Si $k > 0$: Cercle $\mathscr{C}(A, k)$ Si $k = 0$: Point A Si $k < 0$: Ensemble vide
$\lvert z - z_A \rvert = \lvert z - z_B \rvert$	$\Longleftrightarrow$	$MA = MB$	:	Médiatrice de $[AB]$
$\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = 0 \quad [\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = 0 \quad [\pi]$	:	Droite (AB) privée de A et B
$\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = 0 \quad [2\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = 0 \quad [2\pi]$	:	Droite (AB) privée du segment $[AB]$
$\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \pi \quad [2\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \pi \quad [2\pi]$	:	Segment $[AB]$
$\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$	:	Cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B
$\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	:	Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B tel que MAB soit rectangle direct.
$\arg\left(\dfrac{z - z_B}{z - z_A}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad , [2\pi]$	$\Longleftrightarrow$	$\left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	:	Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B tel que MAB soit rectangle indirect.
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$	$\Longleftrightarrow$	$x_{\overrightarrow{MA}}x_{\overrightarrow{MB}} + y_{\overrightarrow{MA}}y_{\overrightarrow{MB}} = 0$	:	Cercle de diamètre $[AB]$

Remarque : Un angle orienté n'est défini que si les deux vecteurs ne sont pas nuls. C'est pourquoi les points A et B doivent être retirés le cas échéant, des ensembles ci-dessus.