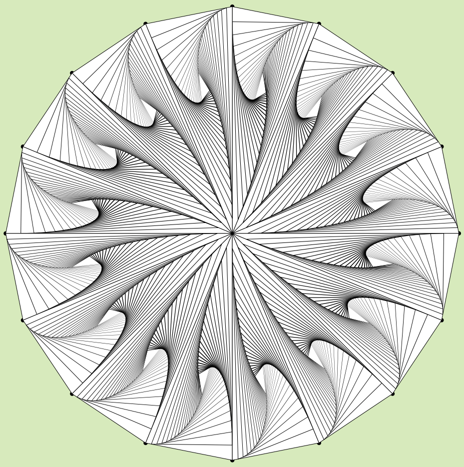
Chapitre 3

Limites et continuité



Hors Sujet

Titre : « Flower Chucker »
Auteur : BANKSY-POCHOIRISTE
Présentation succinte de l'auteur : Il combine les techniques du graffiti et du pochoir pour faire passer ses messages, qui mêlent souvent politique, humour et poésie comme Ernest Pignon-Ernest ou Blek le rat. Les pochoirs de Banksy sont des images humoristiques, parfois combinés avec des slogans. Le message est généralement antimilitariste, anticapitaliste ou antisystème. Ses personnages sont souvent des rats, des singes, des policiers, des soldats, des enfants ou des personnes âgées.
Il s'est forgé une certaine notoriété dans les milieux alternatifs et les médias traditionnels s'intéressent aussi à lui. Il a notamment travaillé sur le film Les Fils de l'homme2 et a réalisé en 2003 la pochette du disque de Blur, Think Tank.
Banksy a fondé le projet « Santa's Ghetto »en réalisant des peintures sur le mur de Gaza afin de redonner espoir aux habitants palestiniens et israéliens. Aidé par d'autres artistes, comme Ron English, un Américain, le mur de séparation prend petit à petit les couleurs d'une toile artistique géante, comme avec l'image de la petite Vietnamienne brûlée au napalm qui tient par la main Mickey Mouse et Ronald McDonald.
Concernant ce projet, Banksy raconte dans son livre Wall and Piece, qu'un jour, alors qu'il peignait sur le mur de séparation, un habitant est venu lui dire : « vous embellissez le mur ». Banksy, flatté : « Merci, c'est gentil », fut aussitôt coupé par le vieil homme : « On ne veut pas que ce mur soit beau, on ne veut pas de ce mur, rentrez chez vous ».

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 3

Limites et continuité

Résumé

Les notions de continuité et de dérivabilité, et par suite d'intégration sont apparus tardivement dans l'histoire des mathématiques ($XVII^{\text{ème}}$ siècle) et ont permis de résoudre de nombreux problèmes auxquels les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale comme le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de trajectoire d'un objet en mouvement, le calcul de la longueur de la trajectoire d'une planète, le calcul de l'aire limitée par des courbes, ... Ce n'est qu'au siècle dernier que les mathématiciens ont travaillé avec rigueur en utilisant ces nouveaux objets, en effet ils se sont longtemps contentés d'utiliser des définitions intuitives.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérées sont non vides et non réduit à un réel.

I) Préliminaires : Limites

I-1 Définition rigoureuse des limites

I-1.1 Limites en ∞

Nous allons donné ici des définitions très proche de celles rencontrés sur la convergence des suites numériques :

Définition 1 :
On dit qu'une fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle I ouvert contenant ℓ contient toutes les images $f(x)$ à partir d'un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Exemple :

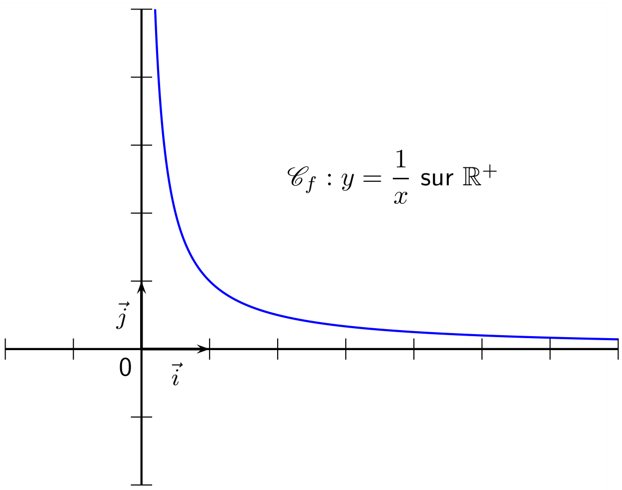
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Considérons un intervalle .... I centré autour de ... du type ...., montrons que toutes les images $f(x)$ sont dans I à partir d'un certain réel x_0.

On a d'abord $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\quad \frac{1}{x} > \cdots > \ldots$, de plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\quad \frac{1}{x} < \ldots \iff x > \frac{1}{\ldots}$

Ainsi, en prenant $x_0 = \frac{1}{\ldots}$ on a

$$f(x) \in I, \qquad \forall x > x_0$$



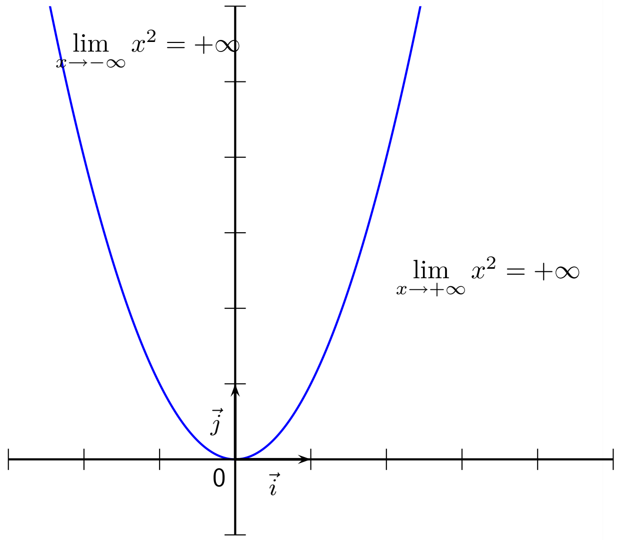
Définition 2 :

- On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $I = \ldots\ldots\ldots$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les images $f(x)$ à partir d'un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- On dit qu'une fonction f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle $I = \ldots\ldots\ldots$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient toutes les images $f(x)$ à partir d'un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$



Définition 3 : *en* $-\infty$

- On dit qu'une fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si et seulement si tout intervalle I ouvert contenant $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $f(x)$ pour des réels inférieurs à un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$$

- On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en $-\infty$ si et seulement si tout intervalle $I = \ldots\ldots\ldots$ avec $A \in \mathbb{R}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $f(x)$ pour des réels $\ldots\ldots$ à un certain réel x_0 et on note :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

- On dit qu'une fonction f tend vers $-\infty$ en $-\infty$ si et seulement si

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

I-1.2 Limite en a, avec $a \in \mathbb{R}$

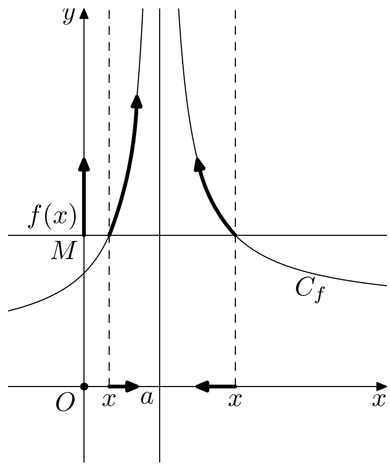
Définition 4 :

On dit qu'une fonction f tend vers $+\infty$ en a si et seulement si pour tout intervalle $I =]M; +\infty[$, avec $M \in \mathbb{R}$ il existe un intervalle ouvert O contenant a tel que $f(x) \in I$ pour tout $x \in O$ et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Dans ce cas on dit aussi que f admet une .... d'équation ....

Illustration :



De manière équivalente on définit enfin les deux dernières limites :

Définition 5 :

– On dit qu'une fonction f tend vers $-\infty$ en a si et seulement si pour tout intervalle $I =]-\infty; M[$, avec $M \in \mathbb{R}$ il existe un intervalle ouvert O contenant a tel que $f(x) \in I$ pour tout $x \in O$ et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

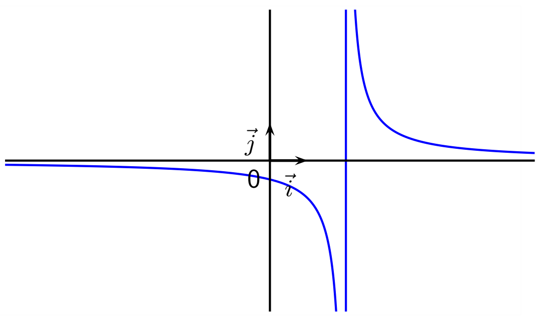
– On dit qu'une fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ il existe un intervalle ouvert O contenant a tels que $f(x) \in I$ pour tout $x \in O$ et on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Dans ce cas on dit aussi que f admet une .... d'équation ....

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty$ (et $\lim\limits_{x \to 2^-} \left(\dfrac{1}{x-2}\right) = -\infty$), donc la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$



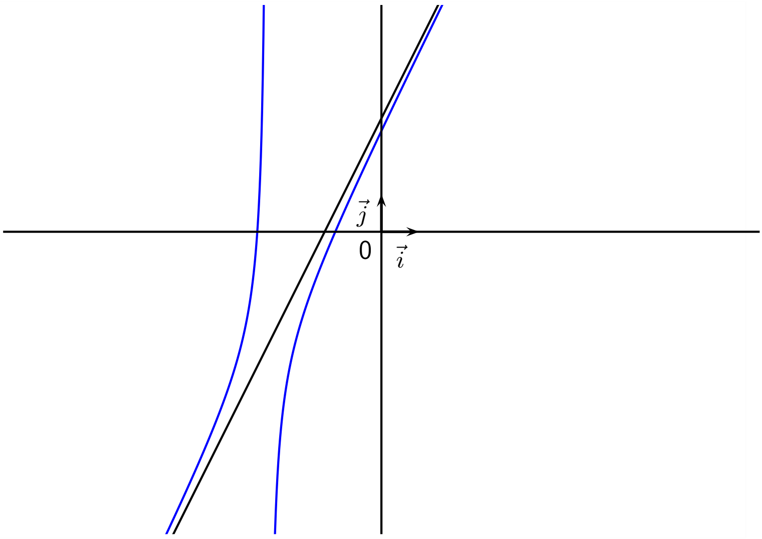
I-1.3 Asymptotes obliques

Définition 6 :
La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de f en $\pm\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \to \pm\infty} [\ldots\ldots\ldots] = 0$$

Exercice 1. On note $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x + 8}{x + 3}$

1. Démontrer que $f(x) = 2x + 3 - \dfrac{1}{x + 3}$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 3)]$
3. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x + 3)]$
4. En déduire que la droite Δ d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$



I-2 Limites usuelles

Théorème 1 : *Les limites à connaître*

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \dots$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \dots$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \dots$
4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = \dots$
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = \dots$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x} = \dots$

I-3 Limites et opérations

I-3.1 Somme, produit, quotient

Les principaux résultats sur les calculs de limites ont été vus en classe de première, on se contentera ici d'énumérer les cas d'indétermination :

LES 4 FORMES INDÉTERMINÉES À CONNAÎTRE

« $0 \times \infty$ » « $\frac{0}{0}$ » « $\frac{\infty}{\infty}$ » « $\infty - \infty$ »

Attention, on ne dira pas « zéro sur zéro est une forme indéterminée »mais plutôt « le quotient de deux fonctions tendant vers 0 est une forme indéterminée »

Exercice 1 :

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $g : x \longmapsto \frac{1+x}{2-x}$ en 2
2. $h : x \longmapsto \frac{\sqrt{x}-1}{x+1}$ en $+\infty$
3. $k : x \longmapsto x - \sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$

I-4 Composée de deux fonctions

Théorème 2 :
Soit $f = g \circ u$, une fonction composée de deux fonctions u et g.
a, b et ℓ désignent des réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
Si on a $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

Preuve **Non Bac**
Raisonnons dans le cas où $a = +\infty$, $b = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$ Soit J un intervalle ouvert qui contient ....
Comme $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = \ell$, J contient tous les réels $g(x)$ pour x .... à un certain x_0.
De plus, comme $\lim\limits_{x\to +\infty} u(x) = -\infty$, l'intervalle ouvert $]-\infty; x_0[$ contient tous les réels $u(x)$ pour x .... à un certain réel x_1.
Si $x > x_1$, on a alors $u(x) < \dots$, et donc $g(u(x)) \in \dots$ i.e $f(x) \in \dots$
Ainsi tout intervalle ouvert J qui contient ℓ contient aussi tous les réels $f(x)$ pour $x > \dots$; ce qui signifie que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$$

Remarque : Ce théorème reste identique si $v_n = f(u_n)$.

Exercice 2 **:**
Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+1}{x+1}}$$

et (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \sqrt{\dfrac{2^{n+2}+1}{2^n+1}}$
Déterminer la limite éventuelle de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et démontrer que la suite (v_n) est convergente, préciser sa limite.

Solutions **:**
Pour x positif, $f(x) = \sqrt{t}$ avec $t = \dfrac{4x+1}{x+1}$.
On a $\lim\limits_{x\to \dots\dots} \dfrac{4x+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to \dots\dots} \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots}\} = \dots$ (*fonction rationnelle en* $+\infty$)
et $\lim\limits_{t\to \dots} \sqrt{t} = \dots$ donc :

$$\lim_{x\to \dots\dots} f(x) = \dots$$

De plus on a $v_n = f(u_n)$ avec $u_n = \dots$.
Or, $\lim\limits_{n\to +\infty} 2^n = \dots$ et $\lim\limits_{x\to \dots} f(x) = \dots$, donc

$$\boxed{\lim_{n\to \dots\dots} v_n = \dots}$$

I-5 Théorème de comparaison et des gendarmes

Théorème 3 :

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$:

- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{x\to\ldots\ldots} f(x) = \ldots\ldots$
- Si, pour x assez grand, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to\ldots\ldots} v(x) = \ldots\ldots$, alors $\lim\limits_{x\to\ldots\ldots} f(x) = \ldots\ldots$

Preuve **Non Bac**

- Soit $J =]A;+\infty[$ un intervalle.
  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$ il existe un réel x_0 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_0.
  De même il existe un réel x_1 tel que $f(x) \geq u(x)$ pour $x > x_1$
  Par conséquent pour $x > max(x_0;x_1)$ $f(x) \in J$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Soit $J =]-\infty;A[$ un intervalle.
  Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = -\infty$ il existe un réel x_0 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_0.
  De même il existe un réel x_1 tel que $f(x) \geq u(x)$ pour $x > x_1$
  Par conséquent pour $x > max(x_0;x_1)$ $f(x) \in J$ ce qui prouve que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 3 **:**

1. Soit $f(x) = -x + \sin x$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Poser $v(x) = -x + 1$)
2. Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ (Poser $u(x) = \dfrac{1}{x^2}$)

Théorème 4 : *Théorème des gendarmes*

Soient f, u et v des fonctions définies sur un intervalle du type $[a;+\infty[$.
Si pour x assez grand, on a $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$, alors :

$$\lim_{x\to\ldots\ldots} f(x) = \ldots\ldots$$

Preuve Non Bac

Soit J un intervalle ouvert contenant ℓ. Il s'agit de démontrer que J contient tous les réels $f(x)$ à partir d'un certain réel.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = \ell$, i.e qu'il existe x_0 tel que $u(x) \in J$ à partir de x_0 et il existe un réel x_1 tel que ....
Soit $x_2 = max(x_0; x_1)$. Si $x > x_2$, l'intervalle J contient donc ...... et ......, donc il contient aussi tous les réels compris entre ...... et ......, en particulier il contient ......, ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

Remarque : Il existe des théorèmes analogues pour des limites en $-\infty$ et en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{2+3\sin x}{x}$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.