EXERCICES : LOIS CONTINUES

Exercice 1. On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$$\mathrm{P}([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $\mathrm{P}([0\ ;\ 200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.
2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure ? 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.
3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\lambda \mathrm{A}\mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{A}} - \mathrm{e}^{-\lambda \mathrm{A}} + 1}{\lambda}$.
   (b) En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale ? la semaine près.

Exercice 2. Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $\mathrm{P}(\mathrm{X} > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est 0,125. On prendra 0,125 pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.
2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.
3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?
   Rappel :
   Loi exponentielle de paramètre λ *sur* $[0\ ;\ +\infty[$, *dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement* :
   pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $\mathrm{P}([a\ ;\ b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et
   pour $c \geqslant 0$, $\mathrm{P}([c\ ;\ +\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.
Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :
B_1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,
B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$\text{A} : \frac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \qquad \text{B} : \frac{3}{120}$$

$$\text{C} : \binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \qquad \text{D} : \binom{10}{3}\times\left(\frac{3}{120}\right)^3\times\left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$\text{A} : 0,98 \qquad \text{B} : \frac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98+0,6\times 0,02} \qquad \text{C} : 0,6\times 0,98 \qquad \text{D} : \frac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0005$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$\text{P}([0\,;\,t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$\text{A} : \mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{B} : \mathrm{e}^{\frac{5}{4}} \qquad \text{C} : 1-\mathrm{e}^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{D} : \mathrm{e}^{-\frac{2000}{2500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule :
$\text{E} = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$
   (a) L'intégrale $\int_0^t \lambda x\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

$$\text{A} : \lambda\frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad \text{B} : -t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda} \qquad \text{C} : \lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda \qquad \text{D} : t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}$$

   (b) La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

$$\text{A} : 3\,500 \qquad \text{B} : 2\,000 \qquad \text{C} : 2\,531,24 \qquad \text{D} : 3\,000$$

Exercice 4. Partie A

On suppose connu le résultat suivant :
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ alors, pour t réel positif, $\text{P}(\text{X} \leqslant t) = \int_0^t \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$

- Démontrer l'égalité suivante : $\text{P}(\text{X} > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
- En déduire que, pour s et t réels positifs, l'égalité suivante est vraie
  $\text{P}_{(\text{X}>t)}(\text{X} > s+t) = \text{P}(\text{X} > s)$ (loi de durée de vie sans vieillissement),
  $\text{P}_{(\text{X}>t)}(\text{X} > s+t)$ désignant la probabilité de l'évènement $(\text{X} > s+t)$ sachant que $(\text{X} > t)$ est réalisé.

Partie B

La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1. (a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $\text{P}(\text{T} \leqslant 10) = 0,7$.
   On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur 0,12 comme valeur approchée de λ.
   (b) Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle
   $\text{P}_{(\text{T}>10)}(\text{T} > 15)$.

(c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.
On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à $0,01$ près de la réponse.

On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

(a) Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y.

(b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.
Déterminer à $0,01$ près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

Exercice 5. Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1000 heures :
   (a) si ce composant est défectueux ;
   (b) si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.
2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :
   $$P(T \geqslant t) = 0,02e^{-5\times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}.$$
   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).
3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?
   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0\,;\,+\infty[$:

Pour $0 \leqslant a \leqslant b$, $P([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Pour $c \geqslant 0$, $P([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Exercice 6. Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25 % au premier fournisseur et 75 % au second.
La proportion de composants défectueux est de 3 % chez le premier fournisseur et de 2 % chez le second.
On note :

- D l'évènemenrt « le composant est défectueux » ;
- F_1 l'évènement « le composanrt provient du premier fournisseur » ;
- F_2 l'évènement « le composanrt provient du second fournisseur ».

1. (a) Dessiner un arbre pondéré.
   (b) Calculer $P(D \cap T_1)$, puis démontrer que $P(D) = 0,0225$.
   (c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*
2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
   (a) Sachant que $P(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.
   (b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

Exercice 7. Liban 3 juin 2010

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même nonfructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue 10 tirages successifs d'une boule avec remise (on tire une boule au hasard, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on recommence).

   Proposition 1 : « La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est
   $3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^7$. »
2. Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda (\lambda > 0)$.
   On rappelle que pour tout réel $a > 0$: $p(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$.

   Proposition 2 : « Le réel a tel que $p(X > a) = p(X \leqslant a)$ est égal à $\frac{\ln 2}{\lambda}$. »