Exercices : Limites et continuité

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2}{1+x^2} < 10^{-4}$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$
   (a) Etudier les variations de f
   (b) Déterminer un réel a tel que, pour tout réel x : si $x > a$ alors $0 \leq f(x) + 1 \leq 10^{-4}$
   (c) Démontrer que
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$$

Exercice 2. Soit f une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a $f(x) \geq 0$

Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $x - 1 \leq E(x) \leq x$
2. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Exercice 4. Soit $f(x) = \dfrac{1+2\sin x}{1+\sqrt{x}}$ sur $]0;+\infty[$

1. Démontrer que, si $x > 0$ alors $-\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{3}{\sqrt{x}}$
2. En déduire que f admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur.

Exercice 5. Démontrer que, dans chacun des cas suivants, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote parallèle à l'axe des abscisses :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \longmapsto \dfrac{2-3x}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x}$$

Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 3$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$

Exercice 7. Démontrer qu'une suite, qui est décroissante et non minorée, a pour limite $-\infty$

Exercice 8. Soit (u_n) la suite définie, pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier k compris entre 1 et n, on a
$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$
2. En déduire que, pour tout $n \geq 1$ on a $u_n \geq \sqrt{n}$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 9. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$$
1. Montrer que, pour tout réel x,
$$\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$$
2. En déduire les limites suivantes :
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\cos x}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x}$

Exercice 10. On considère la fonction f définie pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$ par :
$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 5}{x^2 + x - 2}$$
1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x distinct de 1 et -2 on ait :
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + x - 2}$$
2. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de f dans un repère orthonormal du plan, admet une asymptote oblique $\mathscr{D}$ et deux asymptotes verticales dont on précisera les équations.
3. Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$

Exercice 11. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$
et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1. Démontrer que f est une fonction impaire.
   On appelle g la restriction de f à l'intervalle $I =]0;+\infty[$ et $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
2. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
3. Démontrer que g est croissante sur I
4. On pose $h(x) = g(x) - x$.
   Déterminer la limite de h en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
5. Déterminer :
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x}$$
   Quelle est l'allure de la courbe $\mathscr{C}_g$ au voisinage du point $A(0;1)$?
6. Construire $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_f$

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \text{ si } x < 0 \\ x - 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f.
2. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13. Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+2}$ sur $\mathbb{R}$
2. $f : x \longmapsto \sqrt{3x-1}$ sur $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right[$
3. $f : x \longmapsto \cos 2x$ sur $\mathbb{R}$
4. $f : x \longmapsto \mid 3x - 1 \mid$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 14. On désigne par E la fonction partie entière. Soit f la fonction définie sur $[-2; 2]$ par :

$$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction f
2. La fonction f est-elle continue sur $[-2; 2]$?

Exercice 15. Soit a un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ a \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Est-il possible de choisir le réel a de sorte que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 16.

1. (a) Démontrer que tout polynôme de degré 3 s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner un exemple de polynôme de degré 4 qui ne s'annule dans $\mathbb{R}$.
2. On admet qu'un polynôme de degré 3 a, au plus, trois racines.
   (a) En calculant les images des réels -3, 0 et 2, déduire le nombre de solutions de l'équation :
   $$x^3 - 6x + 3 = 0$$
   (b) Donner un exemple d'équation du troisième degré qui n'a qu'une seule solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 17. Soit (E) l'équation $x^3 + 5x = 2$

- Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution dans l'intervalle $[0; 1]$.
- Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de cette solution.
- L'équation (E) admet-elle des solutions n'appartenant pas à l'intervalle $[0; 1]$? Justifier.

Exercice 18. Déterminer le nombre de solutions non nulles de chacune des équations suivantes et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}

1. $x + \cos x = 1$
2. $x^2 = \sin x$

Exercice 19.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$$
   (a) Etudier les variations de g.
   (b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α telle que $0,65 < \alpha < 0,66$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$f(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + \frac{1}{x}\right)$$
   On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.
   (a) Etudier les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
   (b) En utilisant la question 1., déterminer les variations de f et dresser son tableau de variation
   (c) Soit I le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -1 et J le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 1
      i. Vérifier que la droite (IJ) est tangente en J à $\mathscr{C}_f$.
      ii. Déterminer une équation de la tangente T en I à $\mathscr{C}_f$
      iii. Etudier la position $\mathscr{C}_f$ par rapport à T
   (d) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$$
   et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique dans le même repère que $\mathscr{C}_f$
      i. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto f(x) - h(x)$. Que peut-on dire des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$ en $+\infty$ et en $-\infty$?
      ii. Etudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{P}$
   (e) Construire $\mathscr{P}$, (IJ), T et la courbe $\mathscr{C}_f$

Exercice 20. Afin de dénombrer les solutions de l'équation :
$$x(x^3 - 6x + 1) = -1$$
on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x(x^3 - 6x + 1)$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et la fonction dérivée f'' de f'.
2. Dénombrer les solutions de l'équation
$$4x^3 - 12x + 1 = 0$$
   En donner un encadrement d'amplitude 10^{-1}.
3. En déduire le signe de f', puis le tableau de variation de la fonction f.
4. Conclure quant au nombre de solutions de l'équation proposée.

Exercice 21. Soit f la fonction définie, pour tout réel $x \neq 1$ par :
$$f(x) = \frac{x+1}{x^3 - 1}$$
On désigne par $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x \neq 1$:
$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x^3-1)^2}$$
où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on précisera.
2. Etudier les variations de la fonction P sur $\mathbb{R}$ et démontrer que l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près. En déduire le signe de $P(x)$ selon les valeurs du réel x.
3. En utilisant les questions précédentes, déterminer les variations de la fonction f sur les intervalles où elle est définie.
4. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(0;-1)$
   (b) Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite T .
   (c) Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse -1.
   (d) Vérifier les résultats obtenus précédemment en visualisant à la calculatrice la courbe $\mathscr{C}_f$ et les tangentes étudiées.

Exercice 22. Pour tout entier naturel n supérieur à 2, considérons la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par :
$$f_n(x) = x^n - nx + 1$$
et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$
1. (a) Sur l'écran d'une calculatrice, visualiser les courbes $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$
   (b) Etudier la postion relative des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n-1}$
2. (a) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n
   (b) Quel est le sens de variation de la suite (a_n) ?

Exercice 23. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et A le point de coordonnées $(1;0)$.
L'objet de cet exercice est de déterminer le point B de la courbe $\mathscr{P}$ qui est le plus proche de A.
Dans ce but, pour tout réel x, on pose $f(x) = AM^2$, où M est le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse x.
1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f.
3. En déduire l'existence et l'unicité du point B et déterminer un encadrememnt d'amplitude 10^{-2} de son abscisse b.

Exercice 24. Soit f une fonction continue et définie sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans l'intervalle $[0;1]$. Démontrer que f admet (au moins) un point fixe dans $[0;1]$ [1]

Exercice 25. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - x$$
On note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$
1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes horizontales ?
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x - \frac{1}{2}$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$

1. On considèrera la fonction g où $g(x) = f(x) - x$