EXERCICES : INTÉGRATION

I) Intégration sans primitives

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une figure :

1. $I_1 = \int_a^b k\,dx$ si $k > 0$.
2. $I_2 = \int_0^4 (3-x)\,dx$.
3. $I_3 = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.
4. $I_4 = \int_0^2 (x+1)\,dx$

Exercice 2. Dans cet exercice on utilisera le résultat suivant :

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

afin de calculer les intégrales proposées :

1. $I_5 = \int_0^1 (5x^2+3x)\,dx$
2. $I_6 = \int_{-1}^1 x^2\,dx$
3. $I_7 = \int_{-1}^1 (x^2-3x+8)\,dx$
4. $I_8 = \int_0^1 (x^2-x)\,dx$

Exercice 3.

1. Prouvez que, pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{t^2}{2} \leq \frac{t^2}{1+t} \leq t^2$.
2. Déduisez-en un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt$.

Exercice 4. Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ telle que, pour tout $x \in [0;1]$, il existe deux réels m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M$$

Déterminer la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$$

Exercice 5. Etudier la limite de la suite de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{-x}\,dx$$

Vous pourrez commencer par encadrer e^{-x} sur $[n;n+1]$ en fonction de n.

Exercice 6. On pose

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-x)^n e^{-x}\,dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Prouver que

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Exercice 7.

1. **Vrai ou faux ?** L'intégrale d'une fonction continue et impaire est nulle.
2. **Vrai ou faux ?** Si $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$, alors f est impaire.
3. Trouvez une fonction paire, non identiquement nulle sur $[-2,2]$, telle que $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 0$.
4. **Vrai ou faux ?** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors $\int_{1}^{x} f(t)\,dt$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
5. Trouvez une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)\,dt = +\infty$
6. Trouvez une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{1}^{x} f(t)\,dt = 32$
7. **Vrai ou faux ?**Soit u un réel strictement positif, alors $\int_{0}^{u} \mathrm{E}(x)\,dx \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(x)$ désignant la *partie entière* de x.
8. Trouvez une fonction telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| = \int_{a}^{b} \left|f(t)\right|\,dt$
9. Trouvez une fonction f telle que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| < \int_{a}^{b} \left|f(t)\right|\,dt$
10. Trouvez une *condition nécessaire et suffisante* sur f pour que $\left|\int_{a}^{b} f(t)\,dt\right| = \int_{a}^{b} \left|f(t)\right|\,dt$
11. **Vrai ou faux ?** $\int_{2}^{3} xt^2\,dt = \int_{2}^{3} xt^2\,dx$
12. **Vrai ou faux ?** $\int_{2}^{3} xt^2\,dt = \int_{2}^{3} x^2 t\,dx$
13. Trouvez deux fonctions f et g continues sur $[1,2]$, distinctes, telles que $\int_{1}^{2} f(t)\,dt = \int_{1}^{2} g(u)\,du$
14. **Vrai ou faux ?** Si f est bornée sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_{a}^{x} f(u)\,du$ l'est aussi.
15. **Vrai ou faux ?** Si f est croissante sur $[a,b]$, alors la fonction $x \mapsto \int_{a}^{x} f(u)\,du$ l'est aussi.
16. Déterminez une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et dont la valeur moyenne sur $[-2\,;\,2]$ est 0.

II) Primitives

Exercice 8. Si vous reconnaissez une forme du style $u'u^n$, alors une primitive sera

$$\frac{u^{n+1}}{n+1}$$

En déduire une primitive de f avec

$$f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

Exercice 9. f est la fonction définie sur $\mathrm{I}[-1;8]$ par :

$$f(x) = \frac{2x^3+8x^2+8x-3}{x^2+4x+4}$$

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on a

$$f(x) = 2x - \frac{3}{(x+2)^2}$$

2. (a) En déduire une primitive G de f sur I.
   (b) Calculer la primitive F de f telle que $F(0) = 2$.

Exercice 10. Etudier si F est une primitive de f sur I :

1. $f(x) = \dfrac{2x^2+8x-5}{(x^2+x+3)^2}$ et $F(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x^2+x+3}$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}$ et $F(x) = \dfrac{2x+3}{\sqrt{x}}$ avec $I =]0;+\infty[$.
3. $f(q) = \dfrac{3q-4}{\sqrt{2q-4}}$ et $F(q) = q\sqrt{2q-4}$ avec $I =]2;+\infty[$.

Exercice 11.

1. f est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}$.
   Calculer une primitive F de f sur $]2;+\infty[$.
2. G est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $G(x) = \dfrac{3x-4}{x-2}$.
   Calculer la fonction dérivée de G.
3. Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ?
   Vérifier ce résultat en calculant $F(x) - G(x)$.

Exercice 12. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

1. $g : x \longmapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2-1}}$
2. $h : x \longmapsto \dfrac{e^x+3}{(e^x+3x)^3}$
3. $k : x \longmapsto \dfrac{1}{(ax+b)^2}$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$
5. $j : x \longmapsto e^{3x+2}$
6. $l : x \longmapsto (2x+1)e^{x^2+x+7}$
7. $m : x \longmapsto \sin(3x) + 3\cos(2x)$

Exercice 13. Calculer une primitive de f_i dans les cas suivants :

1. $f_1(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
3. $f_3(x) = \tan x$
4. $f_4(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

III) Intégration avec primitives

Exercice 14. On rappelle que

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

Démontrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 15. Démontrer que

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t|\, dt = 2$$

[1]

Exercice 16. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx$
2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{\ln t}{t}\, dt$
3. $\displaystyle\int_2^4 \frac{e^t}{e^t+1}\, dt$
4. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

Exercice 17. Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[e;e^2]$ par

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

Exercice 18. La capacité pulmonaire de l'être humain suivant son âge x de 10 à 90 ans, s'exprime, en litres, au moyen de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x}$$

Déterminer la valeur moyenne de la capacité pulmonaire entre 20 et 70 ans, à $0,1$ litre près par défaut.

IV) Intégration par parties

Exercice 19.

Calculer les intégrales suivantes [2] :

1. $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_1^2 3(x-1)^2 \ln(x)\, dx$
2. $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\mathrm{e}^{-x}\, dx$
3. $\mathrm{I}_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx$
4. $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\int_1^3 \frac{x+1}{x}(\ln(x)+x)^3\, dx$
5. $\mathrm{I}_5 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\, dx$
6. $\mathrm{I}_6 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
7. $\mathrm{I}_7 = \displaystyle\int_0^1 t^2 e^{-t}\, dt$
8. $\mathrm{I}_8 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$

1. On utilisera la relation de Chasles afin de supprimer les valeurs absolues.
2. On calculera I_7 et I_8 à l'aide de deux intégrations par parties successives

Exercice 20. Montrer que :

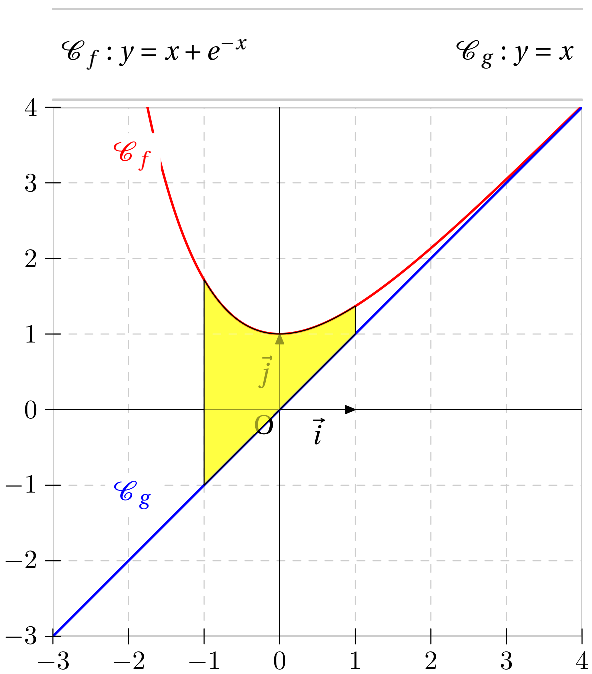
$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$$

[3]

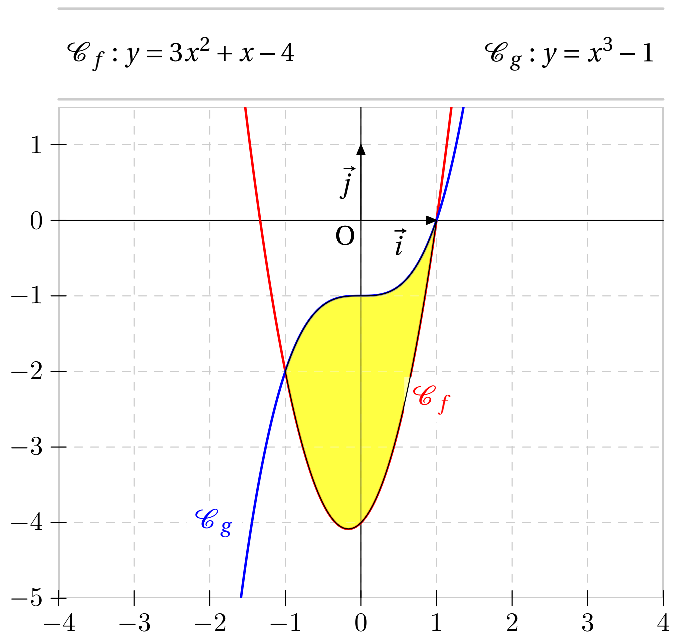
V) Calculs d'aires et de volumes

Exercice 21. Calculer l'aire en unité d'aire de chacun des domaines $\mathscr{D}$ colorés en jaune.

1.



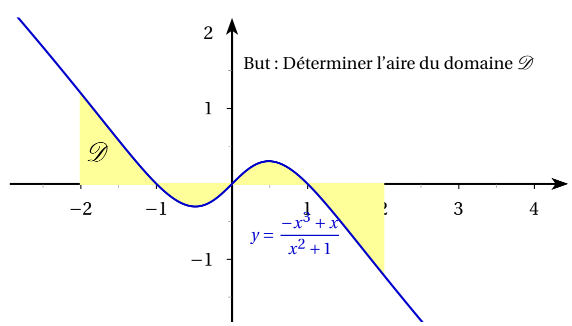
2.



Exercice 22. Dans un repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$y = \frac{-x^3 + x}{x^2 + 1}$$

1. Démontrer que $\mathscr{C}$ a une asymptote Δ en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ compris entre $\mathscr{C}$, Δ et les droites d'équations $x = 2$ et $x = -2$.



3. Intégrer deux fois par parties de façon à retomber sur l'intégrale I.

Exercice 23. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère le cône d'axe (Oz), de sommet A, de hauteur h dont la base est le disque de centre O et de rayon r. Tout plan d'équation $z=t$, avec $t\in[0;h]$, coupe le cône suivant un disque $\mathscr{D}$ d'aire $S(t)$.

1. Déterminer le rapport de l'homothétie de centre A transformant la base du cône en $\mathscr{D}$, et en déduire $S(t)$ en fonction de r, t et h.
2. Déterminer, à l'aide d'une intégrale, le volume du cône en unités de volume.

VI) Annales

Exercice 24. Question de cours
Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.
Soient a et b deux réels d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $a\leqslant b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x)\geqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx$.

Partie A

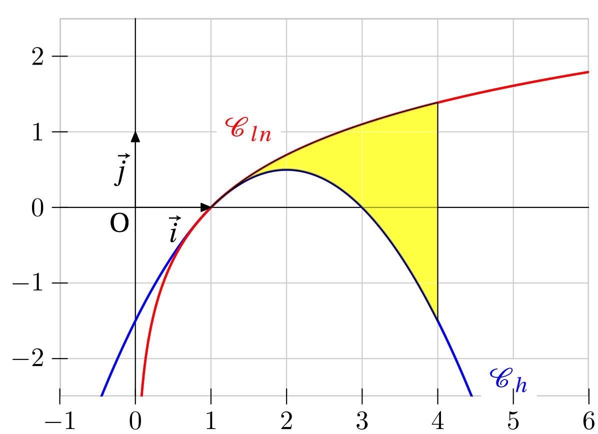
1. Soit x un éel supérieur ou égal à 1.
   Calculer en fonction de x l'intégrale $\displaystyle\int_1^x(2-t)dt$.
2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, on a : $2-t\leqslant\dfrac{1}{t}$.
3. Déduire de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$-\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{3}{2}\leqslant\ln x.$$

Partie B
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{3}{2}$.

Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\,;\,4]$. On a a tracé également la droite (d) d'équation $x=4$.

1. (a) Démontrer que $\displaystyle\int_1^4 h(x)dx=0$.
   (b) Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.
2. On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonction h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1\,;\,4]$.
   En utilisant un intégration par parties, calculer l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire.



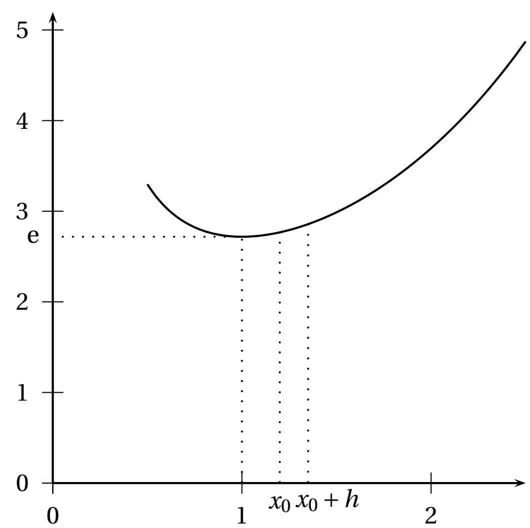
Exercice 25. On considère la fonction f, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{e^t}{t}.$$

1. (a) Justifier la continuité de f sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   (b) Montrer que f est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. **Restitution organisée de connaissances** On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.
   Pour tout réel x_0 de $[1\ ;\ +\infty[$, on note $\mathscr{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$. On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ est une primitive de f.
   (a) Que vaut $\mathscr{A}(1)$?
   (b) Soit x_0 un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathscr{A}(x_0+h) - \mathscr{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h).$$

   (c) Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$?
   (d) En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$ ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction $\mathscr{A}$.
   (e) Conclure.



Exercice 26. **Partie A** On considère la fonction nutnérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe representative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture pour tout x réel strictement positif : $f(x) = \frac{e}{\sqrt{x}} \times \frac{x}{e^x}\Big)$. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Démontrer que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.
4. Construire la courbe $\mathscr{C}$ (unité graphique : 2 cm). On admettra que $\mathscr{C}$ est tangente en O à l'axe des ordonnées.

Partie B On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$.

1. Interpréter géométriquement u_n.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n)$.
3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. (a) Démontrer que F est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ et calculer $\mathrm{F}'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variations de F.
2. (a) Démontrer que pour tout réel t positif : $t+2 \geqslant 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.
   (b) En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$:

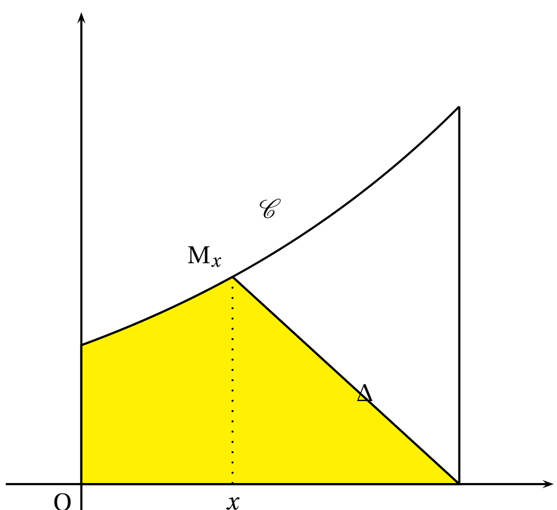
   $$\mathrm{F}(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

   (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$:

   $$\int_0^x (t+2)\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = 4-(x+3)\mathrm{e}^{1-x}.$$

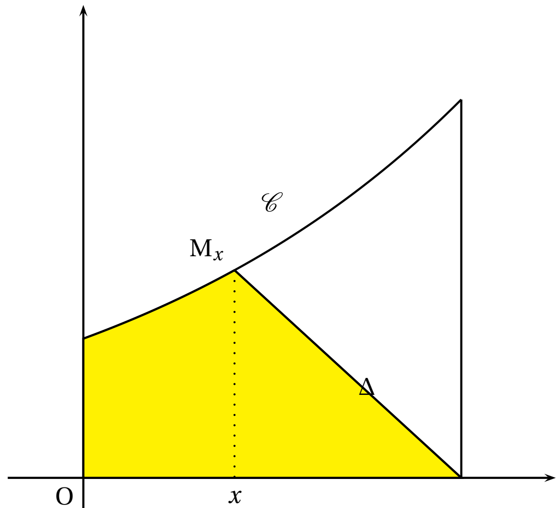
   (d) En déduire que pour tout x appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$: $0 \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \sqrt{2}$.
3. On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 27. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On note I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$. Soient f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $f'x) = \mathrm{e}^{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$. On note Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $[0\,;\,1]$ tel que, si A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α, le segment [IA] partage Δ en deux régions de même aire. Pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$ on note M_x le point de coordonnées $\big(x,\ f(x)\big)$ et T_x le domaine délimité par la droite IM_x, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$. On désigne par $g(x)$ l'aire de T_x.



1. Pour x appartenant à l'intervalle $[0,\,1]$, calculer $g(x)$ en fonction de x.
2. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0\,;\,1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.
4. Trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.

Exercice 28. Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On note I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$. Soient f une fonction positive, strictement croissante et dérivable sur $[0\,;\,1]$, $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(\mathrm{O};\vec{i},\vec{j})$ et Δ la portion de plan comprise entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$. Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à $[0\,;\,1]$ tel que, si A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse α, le segment [IA] partage Δ en deux régions de même aire. Pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$ on note M_x le point de coordonnées $\big(x,\ f(x)\big)$ et T_x le domaine délimité par la droite IM_x, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe $\mathscr{C}$. On désigne par F la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et par $g(x)$ l'aire de T_x.



1. Exprimer, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $g(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$.
2. **Démonstration de cours** Démontrer que F est dérivable et a pour dérivée f.
3. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto g(x)$ sur $[0\,;\,1]$.
4. (a) Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) Montrer qu'il existe un unique réel α de $[0\,;\,1]$ tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.

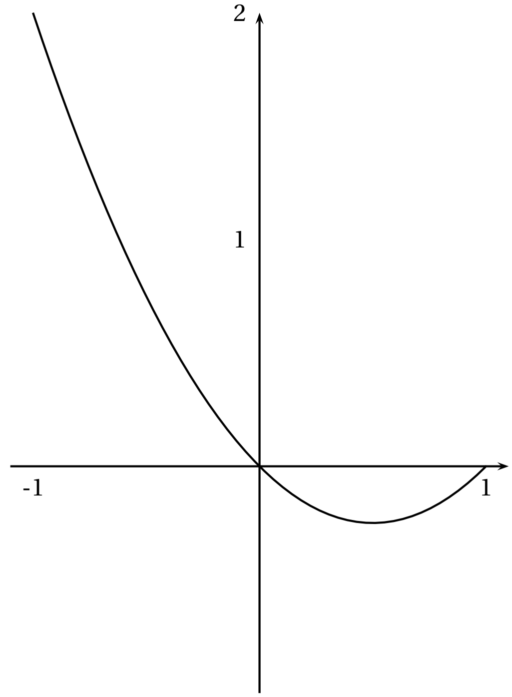
Exercice 29. Les questions sont indépendantes. II est demandé de justifier toutes les réponses fournies.

1. Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données. On donnera l'expression de $f(x)$.

   (a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+b\mathrm{e}^{x}+c$, la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions, 0 et $\ln 2$.

   (b) f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, $f(2)=4$ et, pour tout x et tout y réels strictement positifs, $f(xy)=f(x)+f(y)$.

   (c) f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2\ ;\ 2]$ est 0.
2. Soit g une fonction définie et dérivable, de dérivée g' continue sur $[-1\ ;\ 1]$. La courbe représentative de g est donnée ci-dessous.



Les affirmations suivantes sont-elles cohérentes avec le schéma :

(a) $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x = 0$?

(b) $\displaystyle\int_0^1 g'(x)\,\mathrm{d}x \geqslant -\frac{1}{2}$?

Exercice 30. **Partie A** On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction $f : t \longmapsto (2-t)\mathrm{e}^t$ est une primitive de $g : t \longmapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ sur $[0\,;\,1]$. En déduire la valeur de u_1.
2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul,

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1 \quad \text{(R)}$$

Partie B

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite (u_n) en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus. Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

Valeur de n	Valeur de u_n affichée par la première calculatrice	Valeur de u_n affichée par le deuxième calculatrice
1	7,1828182845E−01	7,1828182846E−01
2	4,3656365691E−01	4,3656365692E−01
3	3,0969097075E−01	3,0969097076E−01
4	2,3876388301E−01	2,3876388304E−01
5	1,9381941508E−01	1,9381941520E−01
6	1,6291649051E−01	1,6291649120E−01
7	1,4041543358E−01	1,4041543840E−01
8	1,2332346869E−01	1,2332350720E−01
9	1,0991121828E−01	1,0991156480E−01
10	9,9112182825E−02	9,9115648000E−01
11	9,0234011080E−02	9,0272128000E−02
12	8,2808132963E−02	8,3265536000E−02
13	7,6505728522E−02	8,2451968000E−02
14	7,1080199309E−02	1,5432755200E−01
15	6,6202989636E−02	1,3149132800E+00
16	5,9247834186E−02	2,0038612480E+01
17	7,2131811612E−03	3,3965641216E+02
18	−8,7016273909E−01	6,1128154189E+03
19	−1,7533092042E+01	1,1614249296E+05
20	−3,5166184085E+02	2,3228488592E+06
21	−7,3858986580E+03	4,8779825043E+07
22	−1,6249077047E+05	1,0731561499E+09
23	−3,7372887209E+06	2,4682591448E+10
24	−8,9694930302E+07	5,9238219474E+11
25	−2,2423732585E+09	1,4809554869E+13

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ? **Partie C**

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (u_n) à partir de la définition :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } u_n = \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant 0$.
2. (a) Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel non nul n

$$(1-t)^n \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e} \times (1-t)^n.$$

   (b) En déduire que pour tout n non nul, $u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie D

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite (u_n).

$$u_{n+1} = (n+1)\,u_n - 1$$

Étant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = a \quad \text{et pour tout entier naturel non nul } n,\ v_{n+1} = (n+1)\,v_n - 1.$$

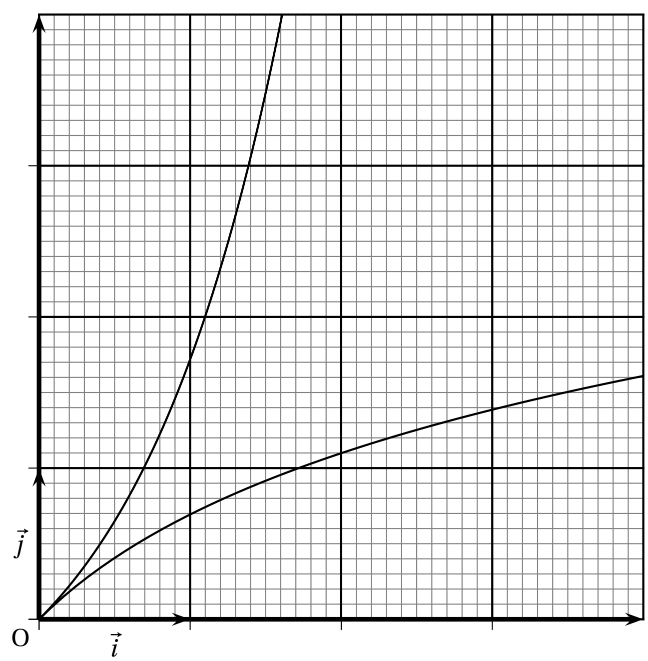
1. En utilisant le raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-\mathrm{e})$ où $n!$ désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.
2. Étudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a. (On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$.)
3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

Exercice 31. On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, par

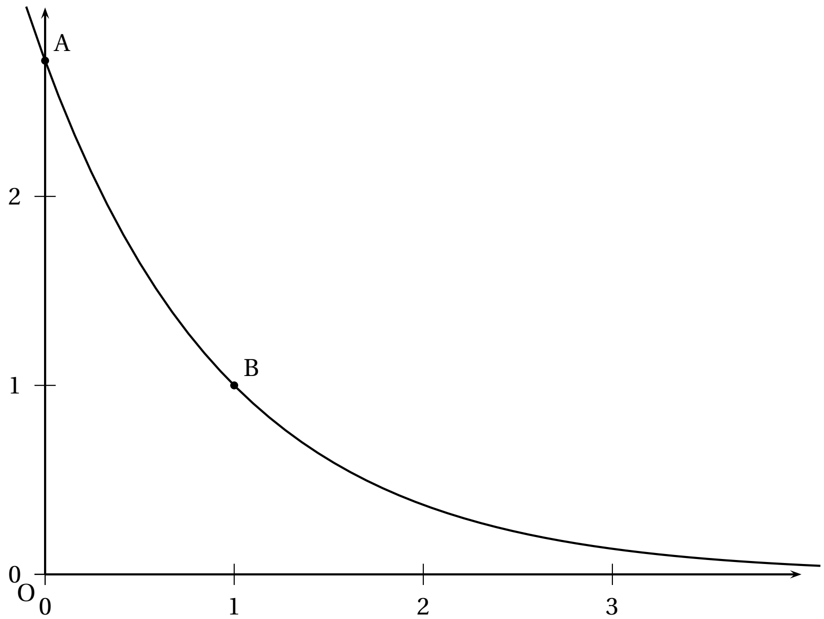
$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^x - 1.$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j})$. Ces courbes sont tracées sur la feuille annexe, dont le candidat disposera comme il le jugera utile ; cette annexe sera à joindre à la copie, avec les éventuels ajouts effectués par le candidat,

1. Vérifier que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune au point $\mathrm{O}(0\,;\,0)$. Préciser la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente.
2. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons différentes le nombre $\mathrm{I}(a) = \displaystyle\int_0^a \ln(x+1)\,\mathrm{d}x$.
   (a) En utilisant des considérations d'aires, démontrer que
   $$\mathrm{I}(a) = a\ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} \left(\mathrm{e}^x - 1\right)\mathrm{d}x.$$
   (b) En déduire la valeur de $\mathrm{I}(a)$.
   (c) Retrouver la valeur de $\mathrm{I}(a)$ en effectuant une intégration par parties.



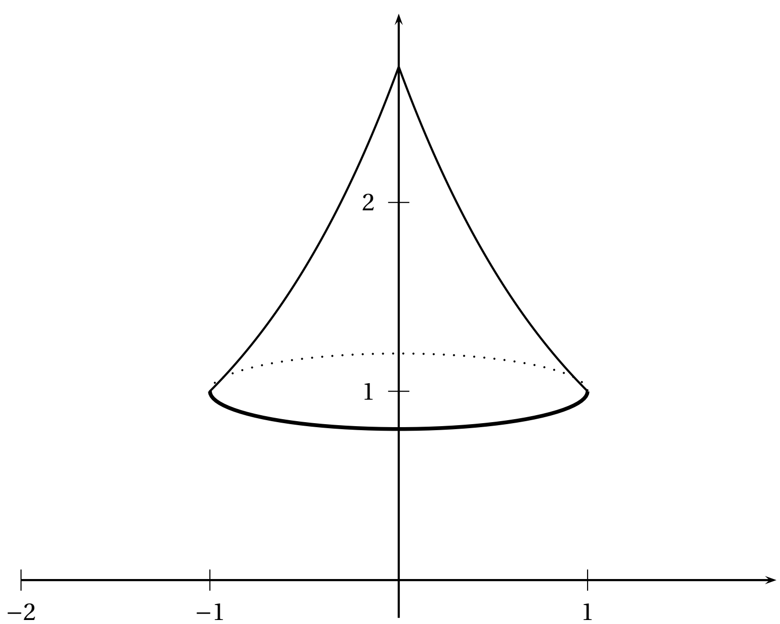
Exercice 32.



On a représenté ci-dessus, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' + y = 0 \quad \text{et telle que} \quad f(0) = e.$$

1. Déterminer $f(x)$ pour tout x réel.
2. Soit t un réel donné de l'intervalle $[1 ; e]$.
   Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x.
3. Soit A le point d'abscisse 0 et B le point d'abscisse 1 de la courbe.
   On considère le solide obtenu par rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ comme représenté ci-dessous. On note V son volume.
   On admet que $V = \pi \int_1^e (1 - \ln t)^2 \, dt$.
   Calculer V à l'aide de deux intégrations par parties successives.



Exercice 33. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x+2}.$$

Les deux parties peuvent être abordées indépendamment.

Partie A

1. Dresser le tableau des variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et déterminer les éventuelles asymptotes de la courbe représentative.
2. (a) Tracer sur la calculatrice graphique les courbes de la fonction f et de la fonction logarithme népérien ; on notera $\mathscr{L}$ cette dernière. Conjecturer avec ce graphique le nombre de solutions de l'équation

   $$f(x) = \ln(x)$$

   sur $[1\,;\,+\infty[$.

   (b) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

   $$g(x) = \ln(x) - f(x)$$

   est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$. En déduire que l'équation $f(x) = \ln(x)$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,+\infty[$.

   (c) Déterminer à 10^{-3} près une valeur approchée de α.

Partie B

1. À l'aide d'une double intégration par parties, déterminer :

   $$\mathrm{I} = \int_0^3 x^2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x.$$

2. On définit le solide $\mathscr{S}$ obtenu par révolution autour l'axe $(\mathrm{O}x)$ de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 3$ dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ (repère orthonormal d'unité 4 cm). On rappelle que le volume $\mathscr{V}$ du solide est donné par :

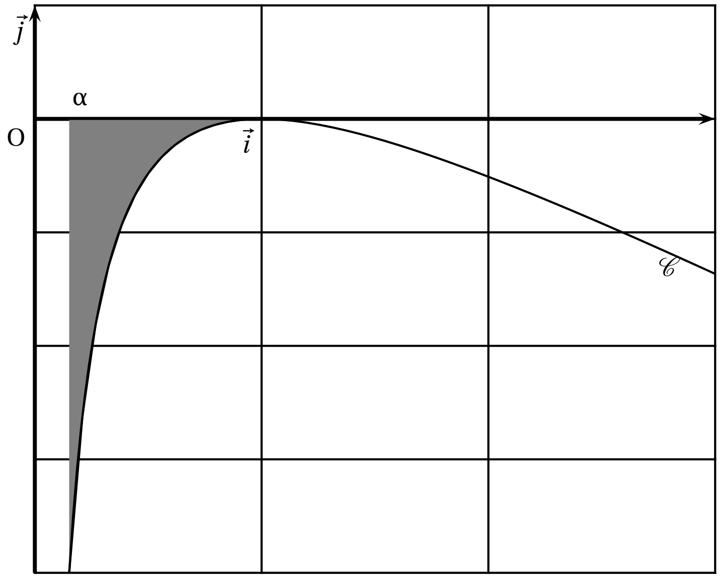
   $$\mathscr{V} = \int_0^3 \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

   (a) Exprimer $\mathscr{V}$ en fonction de I.

   (b) Déterminer alors une valeur approchée à 1 cm^3 près du volume du solide.

Exercice 34. La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. (a) Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f'(x)$ est du signe de

$$\text{N}(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x.\right]$$

   (b) Calculer N(1) et déterminer le signe de N(x) en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

   (c) En déduire le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les coordonnées du point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.

2. On note $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0\,;1[$.

   (a) Exprimer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

   (b) Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation graphique de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1\,;2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

   (a) Démontrer, pour tout réel x élément de $[1\,;2]$, la double inégalité $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \leqslant 1$.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[1\,;2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

5. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

   (b) Déterminer la valeur exacte de ℓ.