# Exercices : Complexes et géométries

**Exercice 1.** (Amérique du sud 2010)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit $A$, $B$ et $P$ les points d'affixes respectives $a = 5 + 5\text{i}$, $b = 5 - 5\text{i}$ et $p = 10$.
On considère un point $M$, distinct de O, d'affixe $z$.
On note $U$ le point d'affixe $u$, image du point $M$ par la rotation $R_\text{A}$ de centre A et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note $T$ le point d'affixe $t$, image du point $M$ par la rotation $R_\text{B}$ de centre B et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.
Soit $D$ le symÉtrique du point $M$ par rapport O.

1. Démontrer que l'affixe du point $U$ est $u = \text{i}(10 - z)$ ; exprimer en fonction de $z$ l'affixe du point $T$ puis justifier que le quadrilatère $MUDT$ est un parallélogramme de centre O.
2. Déterminer l'ensemble $\Gamma$ des points $M$ d'affixe $z$ tels que : $z\overline{z} - 5z - 5\overline{z} = 0$.
   Justifier que le quadrilatère OAPB est inscrit dans $\Gamma$.
3. On suppose que le point $M$ est distinct de O, A et P. Les points O, $M$ et $U$ sont donc distincts deux deux.
   (a) Démontrer que les points O, $M$ et $U$ sont alignés si et seulement si $\dfrac{u}{z} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{z}}$.
   (b) Démontrer que les points O, $M$ et $U$ sont alignés si et seulement si $M$ appartient $\Gamma$.
4. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan tels que O$MU$ soit un triangle isocle en O. Quelle est dans ce cas la nature du quadrilatre $MUDT$ ?
5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $\dfrac{u}{z}$ soit un imaginaire pur. En déduire la nature du quadrilatère $MUDT$ dans le cas où $M$ est un point de la droite $(OP)$ privée de $O$ et $P$. Prouver finalement qu'il existe une unique position du point $M$ tel que $MUDT$ soit un carré.

**Exercice 2.** (La réunion 2010)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ ; unité graphique : 4 centimètres.
On considère la transformation $f$ du plan qui, à tout point $M$ d'affixe $z$, associe le point $M'$ d'affixe $z'$ telle que

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \text{i})z.$$

1. Montrer que la transformation $f$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
2. On définit la suite de points $(M_n)$ de la façon suivante : $M_0$ est le point d'affixe $z_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel $n$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On note $z_n$ l'affixe du point $M_n$.
   (a) Justifier que, pour tout nombre entier naturel $n$, $z_n = \text{e}^{\text{i}\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$.
   (b) Construire les points $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$.
   (c) Montrer que pour tout nombre entier naturel $n$, les points $M_n$ et $M_{n+8}$ sont confondus.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Prouver que les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_7M_0M_1$ ont la même aire. Préciser la valeur exacte de cette aire.

**Exercice 3.** (Métropole)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_\text{A} = \sqrt{3} + 2\text{i}$.
   (a) Montrer que le point A appartient au cercle $\Gamma$ de centre le point I et de rayon 2.
   Sur une figure (unité graphique 1 cm), qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle $\Gamma$, puis construire le point A.

(b) On considère la rotation $r$ de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Démontrer que le point B image du point A par la rotation $r$ a pour affixe $z_{\mathrm{B}} = -1 + \mathrm{i}\left(\sqrt{3}+1\right)$.
Justifier que le point B appartient au cercle $\Gamma$.

(c) Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.

(d) Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{BI}}$.
Que peut-on conjecturer pour les droites $(BF)$ et $(CE)$ ?
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

**Exercice 4.** (Polynésie 2010)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unit : 1 cm).
On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.
On considère les points $A$, $B$, $S$ et $\Omega$ d'affixes respectives $a = -2 + 4\mathrm{i}$, $b = -4 + 2\mathrm{i}$,.

$$s = -5 + 5\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \omega = -2 + 2\mathrm{i}$$

Soit $h$ l'homothtie de centre $S$ et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par $h$ et D l'image du point B par $h$.

1. (a) Déterminer l'écriture complexe de $h$.
   (b) Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4 + 2\mathrm{i}$ et que le point D a pour affixe $d = -2 - 4\mathrm{i}$.
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Démontrer que la droite (S$\Omega$) est la médiatrice du segment [AB].
4. Soit P le milieu du segment [AC].
   (a) Déterminer l'affixe $p$ du point P.
   (b) Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BD}}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{P\Omega}}\right)$.
5. Soit Q le milieu du segment [BD].
   Que représente le point $\Omega$ pour le triangle PQS ?

**Exercice 5.** (La réunion Juin 2010)

**Partie I : Restitution organisée de connaissances**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a$, $b$, $c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.
On rappelle que $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b - a) \quad [2\pi]$.
Montrer que

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$$

**Partie II :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
On associe,à tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle, le point $M'$ d'affixe

$$z' = \frac{z - 1 - \mathrm{i}}{z}.$$

Le point $M'$ est appelé le point image du point $M$.

1. (a) Déterminer, sous forme algébrique, l'affixe du point B$'$, image du point B d'affixe i.

   (b) Montrer que, pour tout point $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle, l'affixe $z'$ du point $M'$ est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle pour lesquels l'affixe du point $M'$ est telle que $|z'| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ non nulle pour lesquels l'affixe du point $M'$ est un nombre réel ?

**Exercice 6.** (Asie Juin 2010)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. L'unité graphique est 1 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère les points A, B, C et P d'affixes respectives :

$$a = -2, \quad b = 2 - 2\text{i}\sqrt{3}, \quad c = 3 + 3\text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad p = 10.$$

**PARTIE A tude de la configuration**

1. Construction de la figure.
   (a) Placer les points A et P dans le repre $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
   (b) Déterminer les modules des nombres complexes $b$ et $c$.
   (c) Utiliser les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6 pour construire les points B et C.
2. Démontrer que le triangle BCP est équilatéral.
3. On note $r_{\text{A}}$ la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
   (a) Vérifier que l'image Q du point C par $r_{\text{A}}$ a pour affixe : $q = -4 + 4\text{i}\sqrt{3}$.
   (b) Vérifier l'égalité : $q = -2b$. Que peut-on en déduire pour les points B, O et Q ?
4. Soit R le symétrique de C par rapport à O.
   (a) Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes en O.
   (b) Etablir que : AP = BQ = CR.

**PARTIE B**

On note $f$ l'application qui, à tout point $M$ du plan, associe le réel $f(M)$ défini par :

$$f(M) = M\text{A} + M\text{B} + M\text{C}.$$

1. Calculer $f(\text{O})$.
2. Soient $M$ un point quelconque et $N$ son image par la rotation $r_{\text{A}}$.
   Démontrer que : $M\text{A} = MN$ puis que $M\text{C} = N\text{Q}$.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiatives, même infructueuses, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   En utilisant l'inégalité triangulaire, démontrer que pour tout point $M$ du plan, $f(M) \geqslant 12$.

**Exercice 7.** (Polynésie Juin 2010)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

**Partie A - Restitution organisée de connaissances**

**Prérequis**

Soit $z$ un nombre complexe tel que $z = a + b\text{i}$ où $a$ et $b$ sont deux nombre réels.
On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - b\text{i}$.

**Questions**

1. Démontrer que, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, et tout nombre complexe $z$, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

**Partie B**

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où $z$ est un nombre complexe.

1. Montrer que si le nombre complexe $z$ est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
   (a) Ecrire le nombre complexe $z_0$ sous forme exponentielle.
   (b) Vérifier que $z_0$ est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

**Partie C**

Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$z_\mathrm{A} = 1 + \mathrm{i}\ ;\ z_\mathrm{B} = -1 + \mathrm{i}\ ;\ z_\mathrm{C} = -1 - \mathrm{i} \text{ et } z_\mathrm{D} = 1 - \mathrm{i}.$$

Soit $r$ la rotation du plan de centre C et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$.
On appelle E l'image du point B par $r$ et F celle du point D par $r$.

1. Déterminer l'écriture complexe de la rotation $r$.
2. (a) Démontrer que l'affixe du point E, note $z_\mathrm{E}$, est égale à $-1 + \sqrt{3}$
   (b) Déterminer l'affixe $z_\mathrm{F}$ du point F.
   (c) Démontrer que le quotient $\dfrac{z_\mathrm{A} - z_\mathrm{E}}{z_\mathrm{A} - z_\mathrm{F}}$ est un nombre réel.
   (d) Que peut-on en déduire pour les points A, E et F ?

**Exercice 8.** (Amérique du nord Juin 2010)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
On considère les points A d'affixe i, B d'affixe $-2\mathrm{i}$ et D d'affixe 1.
On appelle E le point tel que le triangle ADE soit équilatéral direct.
Soit $f$ l'application qui à tout point $M$ d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = \frac{2z - \mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}.$$

1. Démontrer que le point E a pour affixe $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + \mathrm{i})$.
2. Exprimer sous forme algébrique l'affixe du point D′ associé au point D par l'application $f$.
3. (a) Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$ différent de i, $(z' + 2\mathrm{i})(z - \mathrm{i}) = 1$.
   (b) En déduire que pour tout point $M$ d'affixe $z (z \neq \mathrm{i})$ :

$$\mathrm{BM'} \times \mathrm{AM} = 1$$
$$\text{et } \left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{B}M'}\right) = -\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) + k \times 2\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

4. (a) Démontrer que les points D et E appartiennent au cercle (C) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   (b) En utilisant les résultats de la question 3. b., placer le point E′ associé au point E par l'application $f$. On laissera apparents les traits de construction.
5. Quelle est la nature du triangle BD′ E′ ?