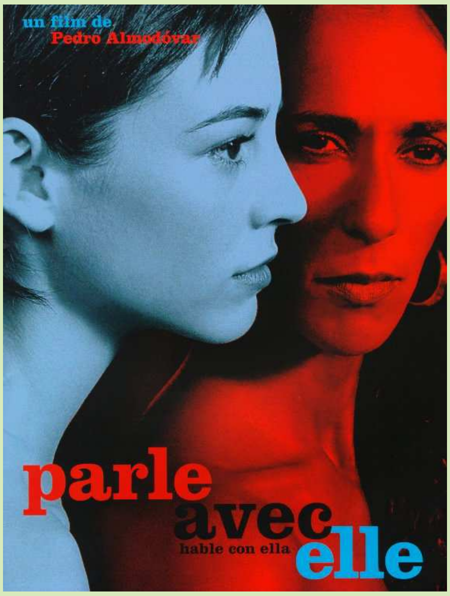
Chapitre 4

Dérivabilités

Hors Sujet



Titre : « Parle avec elle »
Auteur : Pedro Almodovar
Présentation succinte de l'auteur : Pedro Almodóvar Caballero est né le 24 septembre 1949 à Calzada de Calatrava, dans la province de Ciudad Real et la communauté autonome de Castille-La Manche, en Espagne. À 8 ans, il émigre avec sa famille en Estrémadure. Il y fait ses études secondaires qu'il poursuit chez les Franciscains. Comme Vargas Llosa il fait preuve de guidisme. Vers 16 ans il quitte sa maison seul pour s'installer à Madrid, sans argent et sans travail, mais avec un projet très concret : étudier le cinéma et en faire son métier. Il lui est impossible de s'inscrire à l'école officielle du cinéma puisque Franco vient juste de la fermer. Dans la mesure où il ne peut apprendre le langage cinématographique, Almodóvar décide d'en apprendre le fond en multipliant ses expériences artistiques personnelles dans différents domaines. Malgré la dictature, Madrid représente, pour un adolescent provincial, la culture, l'indépendance et la liberté. Il fait de nombreux petits boulots et s'achète sa première caméra super 8 après avoir décroché un emploi à la Compagnie nationale de téléphone d'Espagne. Il y travaille douze ans comme employé de bureau. Le matin, à la Compagnie de téléphone, il apprend à connaître la classe moyenne espagnole qui vit les débuts de la société de consommation, avec ses grands drames et ses petites misères. Le soir et la nuit, il écrit, fait du théâtre avec la compagnie indépendante Los Goliardos et tourne des films en super 8. Il collabore à diverses revues underground, écrit des nouvelles dont certaines sont publiées. Il a aussi réalisé des romans-photo au cours de sa jeunesse. Il fait également partie d'une troupe de théâtre amateur (référence à cette période dans Tout sur ma mère) et fait partie d'un groupe punk-rock avant de commencer sa carrière cinématographique.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
Thurston Moore (Sonic Youth)

Leçon 4

Dérivabilités

Résumé

Les notions de continuité et de dérivabilité, et par suite d'intégration sont apparus tardivement dans l'histoire des mathématiques ($XVII^{\text{ème}}$ siècle) et ont permis de résoudre de nombreux problèmes auxquels les méthodes classiques n'offraient pas de solution générale comme le calcul de la vitesse instantanée, la recherche de trajectoire d'un objet en mouvement, le calcul de la longueur de la trajectoire d'une planète, le calcul de l'aire limitée par des courbes, ... Ce n'est qu'au siècle dernier que les mathématiciens ont travaillé avec rigueur en utilisant ces nouveaux objets, en effet ils se sont longtemps contentés d'utiliser des définitions intuitives.

Toutes les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les intervalles considérés sont non vides et non réduits à un point.

I) Dérivée d'une fonction en un point

I-1 Définitions et premières remarques

Définition 1 :

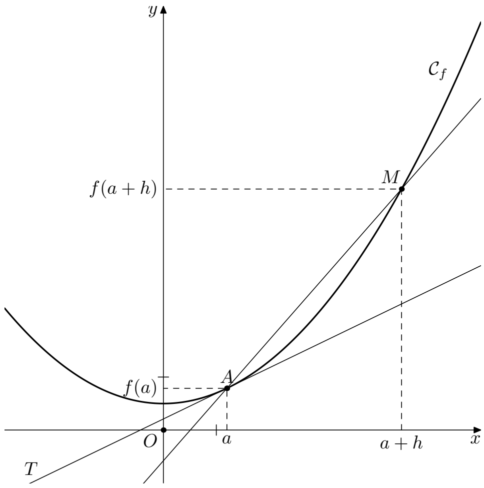
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I.
On dit que f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de f en a admet une limite ℓ en a i.e :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

Dans ce cas, ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a, et on le note $f'(a)$.

Vocabulaire :

– La quantité $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (ou $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$) s'appelle le taux d'accroissement de f en a. Graphiquement elle représente le .... de la sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$ entre les points d'abscisses a et $a+h$



– La définition précédente peut aussi se traduire par : f est dérivable en a si et seulement si l'accroissement de f en a admet une limite finie lorsque x tend vers a (ou lorsque h tend vers 0).

– Lorsque f est dérivable en a, nous pouvons écrire :

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+h\phi(h) \qquad \text{avec } \lim_{h\to 0}\phi(h)=0$$

Ce qui revient à écrire, en posant $h=x-a$:

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{avec } \lim_{x\to a}\phi(x-a)=0$$

– Si f est dérivable en a, on peut utiliser la relation précédente et on obtient :

$$\lim_{x\to a} f(x)-f(a)=\dots\dots \iff \lim_{x\to a} f(x)=\dots\dots \iff f \text{ est } \dots\dots\dots\dots \text{en } a$$

Ainsi, **toute fonction dérivable en a est** .... **en** a, la réciproque est fausse.

– Les physiciens expriment volontiers une variation à l'aide du symbole Δ ; ils notent ainsi $\Delta x=x-a$ et $\Delta y=f(x)-f(a)$.
Avec ces notations, on obtient :

$$\Delta y=f'(a)\Delta x+\Delta x\phi(\Delta x) \qquad \text{où } \phi \text{ tend vers 0 quand } \Delta x\longrightarrow 0$$

Nous exprimerons symboliquement cette égalité par :

$$dy=f'(a)dx \qquad i.e \qquad f'(a)=\frac{dy}{dx}(a) \qquad \text{c'est la notation différentielle}$$

Exemple :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Etudions sa dérivabilité en 0.
   Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre 0 et $0+h$:

   $$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

   La limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0 est ......, par conséquent f est .... en 0 et ....
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x)=\sqrt{x}$. Etudions sa dérivabilité en 0.
   Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre ... et ...... :

   $$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\dots=\frac{1}{\sqrt{h}}$$

   La limite de ce taux d'accroissement lorsque h tend vers 0^+ est ......, par conséquent g n'est pas dérivable en 0.
3. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mid x\mid$. Etudions sa dérivabilité en 0.
   Pour cela on calcule le taux d'accroissement entre ... et ...... :

   $$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots}=\frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots}=\frac{\mid h\mid}{h}$$

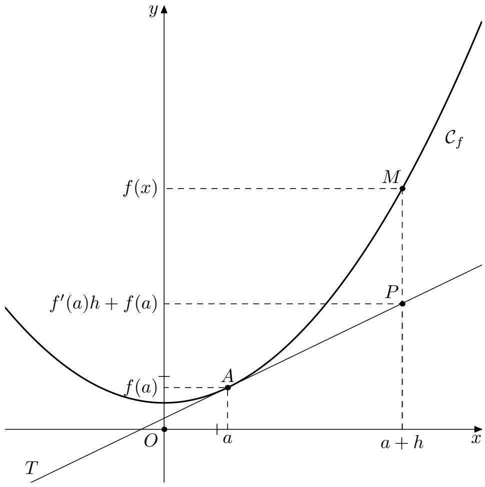
   Lorsque $h<0$ ce taux d'accroissement vaut ...... et sa limite lorsque h tend vers 0^- est ....
   En revanche si $h\geq 0$, ce taux d'accroissement vaut ...... et sa limite lorsque h tend vers 0^+ est ......, par conséquent la limite à droite .... à la limite à gauche et donc g .... en 0.

I-2 Différentes interprétations

I-2.1 Interprétation graphique : Tangente

Lorsque f est dérivable en a, la représentation graphique de f admet au point $A(a; f(a))$ une .... de coefficient directeur ....
De plus comme A est un point de cette droite on trouve (ou retrouve) son équation

$$y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$



Exercice 1 :
On donne

$$f(x) = -x^2 + 3$$

Donner l'équation de la tangente T au point d'abscisse $a = 2$.

I-2.2 Interprétation numérique : Approximation Affine

On a vu que lorsque f est dérivable en a on a :

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + (x-a)\phi(x-a) \qquad \text{avec } \lim_{x\to a}\phi(x-a) = 0$$

Autrement dit, lorsque x est proche de a on a

$$f(x) - f(a) \simeq f'(a)(x-a) \iff f(x) \simeq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On dit qu'il s'agit d'une .... de $f(x)$, on l'appelle approximation affine car c'est une approximation de la forme $f(x) = mx+p$, avec $m = \ldots$ et $p = \ldots\ldots\ldots$ (en quelque sorte pour x proche de a on confond la courbe de f avec sa tangente)

I-2.3 Interprétation cinématique : Vitesse

Supposons ici que f représente la loi horaire d'un mobile en déplacement. La vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est alors :

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

La vitesse instantanée du mobile au moment t_0 est donc donnée par :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0)$$

Si f est une loi horaire d'un mobile en mouvement, le nombre dérivé en t_0 représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.