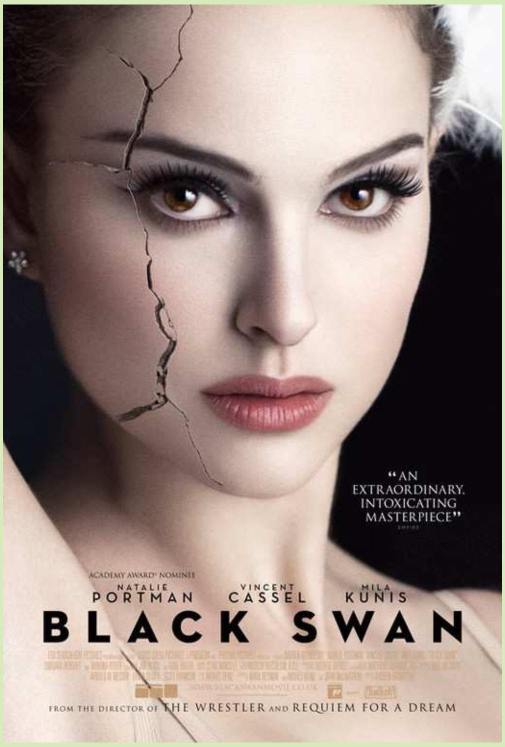
Chapitre 10

Produit Scalaire

Hors Sujet



Titre : « Black Swan »
Auteur : Darren Aronofsky
Présentation succinte de l'auteur : Darren Aronofsky est né le 12 février 1969 dans une famille juive de New York. Il s'intéresse assez vite à l'art et entre à l'université Harvard pour étudier les techniques de réalisation et d'animation. Il y fait la rencontre de Sean Gullette avec qui il tourne son court métrage de fin d'études, Supermarket Sweep. En février 1996, il parvient à rassembler les 60 000 dollars nécessaires pour la réalisation de son premier long métrage, π, qui sera un véritable succès, remportant de nombreux prix et souvent classé parmi les 10 meilleurs films de l'année. Il enchaîne en 2000 avec Requiem for a dream, adaptation du roman éponyme de Hubert Selby : un film choc sur l'addiction sous toutes ses formes, montrant la décadence infernale d'un quatuor noyant son quotidien dans des visions faussées du paradis et de la célébrité, avec Jared Leto, Jennifer Connelly, Ellen Burstyn et Marlon Wayans.
En 2010, il sort Black Swan avec Natalie Portman, Vincent Cassel, Mila Kunis, Barbara Hershey et Winona Ryder, qui connaît lui aussi un grand succès et gagne de nombreux prix, notamment l'Oscar 2011 de la meilleure actrice pour Natalie Portman.
Au sujet de Black Swan : « Ce n'est donc pas par plaisir sadique ou goût de la manipulation qu'Aronofsky filme cette descente aux enfers. Il a une vraie obsession, qui lui tient à coeur, et qui le pousse à filmer : la quête de la perfection. »(Cahier du cinéma)

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 10

Produit Scalaire

Résumé

Nous allons développer dans cette leçon une des grandes nouveautés de terminale : le lien entre algèbre et géométrie, deux domaines jusqu'ici étrangers. L'outil central sera le produit scalaire qui sera donc étudié avec attention. Vous verrez l'an prochain qu'un « ensemble de vecteurs »dans lequel on peut définir un produit scalaire est appelé espace euclidien.

I) Définition du produit scalaire et conséquences immédiates

I-1 A la recherche d'une définition

Vous avez remarqué au moment de l'étude de la fonction exponentielle que son mode de construction n'était pas unique : certains partent de l'équation différentielle $y' = y$, d'autres de l'équation fonctionnelle $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, d'autres encore de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ ou même de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ... Pourtant, tous construisent la même fonction, car ces définitions s'avèrent équivalentes. La nature du problème étudié, le niveau d'enseignement, etc. incitent alors à préférer l'une ou l'autre des définitions.

C'est encore le cas pour le produit scalaire. Nous choisirons la méthode la plus adaptée au programme de terminale et n'utiliserons que le théorème de Pythagore en admettant que l'on peut munir l'Espace d'un repère orthonormé.

Dans tout ce chapitre, les bases ou repères considérés sont orthonormés.
De plus, nous étendons les définitions et les propriétés du produit scalaire vus dans le plan à l'espace.

I-2 Définition analytique

Définition 1 : *Produit scalaire dans l'Espace*

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans un repère orthonormé de l'Espace.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ que l'on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

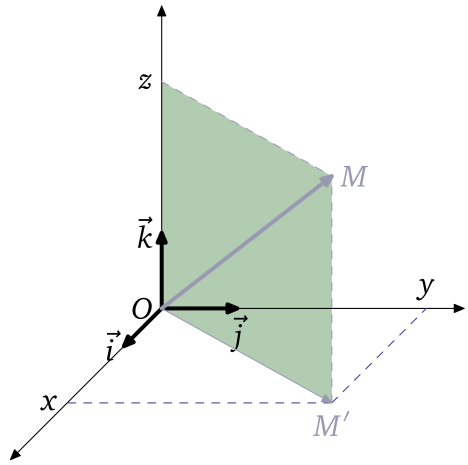
Exemple :

Avec $\vec{u}(1;2;3)$ et $\vec{v}(4;5;6)$ on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Remarques :

– Cette définition est déroutante : elle dépend du choix d'un repère : y aurait-il un produit scalaire par repère, ce qui pourrait s'avérer fort génant ! Nous allons en fait nous assurer que cette définition en est bien une, i.e qu'elle ne dépend pas du choix du repère. Tout d'abord, un petit dessin :



Soit $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$. Nous pouvons calculer OM^2, i.e le carré de la norme du vecteur $\vec{u}$ en fonction de x, y et z.
D'après le théorème de Pythagore : $\mathrm{OM}^2 = \mathrm{OM}'^2 + z^2$ et d'autre part, $\mathrm{OM}'^2 = x^2 + y^2$. Finalement on obtient que $\mathrm{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$.
La longueur d'un vecteur ne dépend pas du repère, par conséquent le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{u}$ non plus.

– Intéressons-nous maintenant à

$$||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (x+x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2 = x^2+2xx'+x'^2+y^2+2yy'+y'^2+z^2+2zz'+z'^2 = x^2+y^2 = ||\vec{u}||^2+||\vec{v}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$$

Ceci montre que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

et ne dépend pas du repère choisit.

– On notera, parfois,

$$\vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2$$

De même, si A et B sont deux points on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left|\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\right|^2 = \mathrm{AB} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}^2$$

– Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
Attention : La réciproque est fausse, en effet soit $\vec{u}(1;2;0)$ et $\vec{v}(-2;1;0)$ alors :

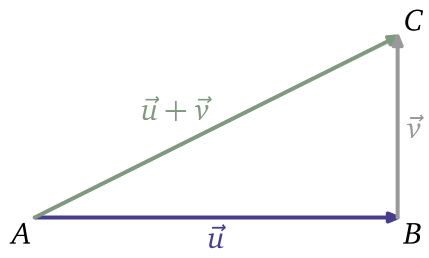
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -2+2 = 0$$

– Dans le cas où les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires avec $\vec{v} = k\vec{u}$ on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xkx + yky + zkz = k(x^2+y^2+z^2) = k||\vec{u}||^2$$

I-3 Vecteurs orthogonaux

Nous allons maintenant aborder la notion qui a motivé l'introduction du produit scalaire en Terminale, à savoir l'orthogonalité de deux vecteurs. Considérons la figure suivante :



Si $(AB) \perp (BC)$ alors d'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \Longleftrightarrow ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u} + \vec{v}||^2$$

D'après la remarque précédente on a donc :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = 0$$

Réciproque si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, alors toujours d'après le même résultat on a :

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 0 \Longleftrightarrow ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u} + \vec{v}||^2$$

La réciproque du théorème de Pythagore assure alors que $(AB) \perp (BC)$. Dans ce cas adoptons la notation « naturelle »suivante $\vec{u} \perp \vec{v}$, nous venons de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Remarque : Si un vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à tout autre vecteur, il est orthogonal en particulier à lui-même, par conséquent :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \text{ř} \Longleftrightarrow x = y = z = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = 0$$

I-4 Autres caractérisations du produit scalaire

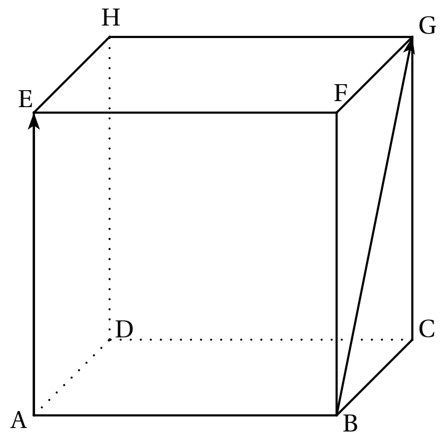
Théorème 2 :

1. $$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right) = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$$
2. Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ on a :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u}; \vec{v})$$
3. Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ on a :
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'}$$
où $\vec{v'}$ est le vecteur projeté de $\vec{v}$ selon la direction de $\vec{u}$.

Exemple :

On considère le cube ABCDEFGH d'arête a. Calculer de plusieurs façons le produit scalaire $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$

- Dans la base orthonormale $\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}; \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}; \frac{\overrightarrow{AE}}{AE}\right)$ on a :
$\overrightarrow{AE}(0;0;a)$ et $\overrightarrow{BG}(0;a;a)$, par conséquent :
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = a \times (a\sqrt{2}) \times \cos\frac{\pi}{4} = a^2$$
- Avec le cosinus :
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = AE \times BG \times \cos\left(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{BG}\right) = a^2 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$
- Avec le vecteur projeté :
$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AE} = AE^2 = a^2$$



Preuve

1. On a démontré la première égalité lors d'une remarque, on s'y prend alors de la même manière pour les deux autres.

2.3. Démontrons ces deux relations dans un cas particulier pour commencer.
Cas particulier : $\vec{v} = k\vec{u}$.
Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient deux vecteurs colinéaires i.e qu'il existe un réel $k \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

Ainsi :

$$||\vec{v}|| = |k|\,||\vec{u}||$$

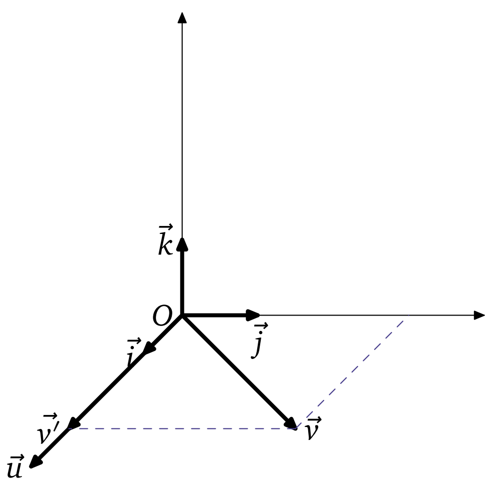
Par conséquent :

$$||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v}) = |k|\,||\vec{u}||^2\cos(\vec{u};\vec{v})$$

Or, si $k > 0$ alors $\cos(\vec{u};\vec{v}) = 1$ et donc $|k|\cos(\vec{u};\vec{v}) = k$.
et si $k < 0$ alors $\cos(\vec{u};\vec{v}) = -1$ et donc $|k|\cos(\vec{u};\vec{v}) = -k \times (-1) = k$.
Ainsi dans tous les cas :

$$|k|\cos(\vec{u};\vec{v}) = k \Longrightarrow ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v}) = k\,||\vec{u}||^2 = \vec{u}\cdot\vec{v} \qquad \text{d'après une remarque précédente}$$

De plus, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{v'} = \vec{v}$ d'où le résultat 3..
Cas général :
Supposons désormais que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient deux vecteurs non colinéaires, on va construire une base orthonormée afin d'appliquer la définition du produit scalaire.
Posons $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$ (possible puisque $\vec{u} \neq \vec{0}$.
Soit $\vec{j}$ un vecteur coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tel que $(\vec{i};\vec{j}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\left|\left|\vec{j}\right|\right| = 1$.
Enfin considérons $\vec{k}$ le vecteur orthogonal à $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tel que $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ soit une base directe de l'espace.
On obtient la figure suivante :



Dans ce repère le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnée $(||\vec{u}||, 0, 0)$.
$\vec{v}$ a pour coordonnées $(||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v}), ||\vec{v}||\sin(\vec{u},\vec{v}), 0)$.
$\vec{v'}$ a pour coordonnées $(||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v}), 0, 0)$.
On obtient alors, en utilisant la définition :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v})$$

et

$$\vec{u}\cdot\vec{v'} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\vec{u};\vec{v})$$

ce qui démontre 2. et 3..

II) Propriétés du produit scalaire

Propriété 1 :
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel λ on a :

1. Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. Bilinéarité(linéarité par rapport aux deux variables :)
   $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport à la première variable)
   $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport à la seconde variable)
   $\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$
3. Définie : $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Longleftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$
4. Positive : $\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0$

Remarque : On dit que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Preuve

Dans un repère orthonormal de l'espace, notons $\vec{u}(x;y;z)$, $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'+zz'=x'x+y'y+z'z=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2.
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')+z(z'+z'')=xx'+xx''+yy'+yy''+zz'+zz''=xx'+yy'+zz'+xx''+yy''+zz''=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(x+x')x''+(y+y')y''+(z+z')z''=xx''+x'x''+yy''+y'y''+zz''+z'z''=xx''+yy''+zz''+x'x''+y'y''+z'z''$$
i.e
$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$\vec{u}\cdot\lambda\vec{v}=x\lambda x'+y\lambda y'+z\lambda z'=\lambda xx'+\lambda yy'+\lambda zz'=\lambda\vec{u}\cdot\vec{v}=\lambda(xx'+yy'+zz')=\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})$$
3. $\vec{u}\cdot\vec{u}=0 \Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2=0 \Longleftrightarrow x=0\,;\ y=0$ et $z=0 \Longleftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$
4. $\vec{u}\cdot\vec{u}=x^2+y^2+z^2\geq 0$

Exemple :

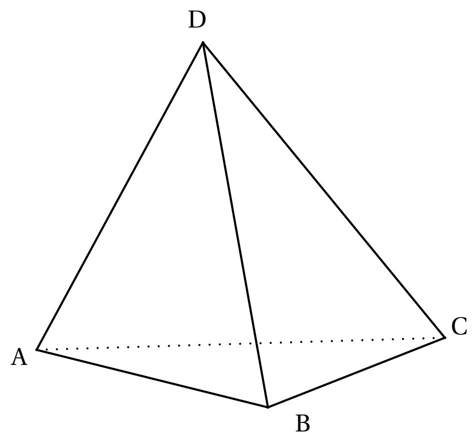
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BD}$$

Exercice 1 :

On considère un tétraèdre ABCD régulier d'arête a. (*chaque face est un triangle équilatéral de côté a*) Démontrer que deux arêtes opposées sont orthogonales.

Solutions :

Démontrons ce résultat pour les arêtes $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ (compte tenu de la symétrie de la figure, cela suffira à démontrer le résultat voulu).



$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$$

De plus :
$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=BA\times BD\times\cos\frac{-\pi}{3}=a^2\frac{1}{2}$$
Et
$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=BC\times BD\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a^2}{2}$$
Ainsi :
$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=0$$

Exercice 2 :

ABCDEFGH est un cube dont les sommets sont disposés comme sur la figure ci-dessous.
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont-ils orthogonaux ?

Solutions :

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AH}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\right)=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DE}$$

Or, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont leurs directions contenus dans des plans orthogonaux, par conséquent :

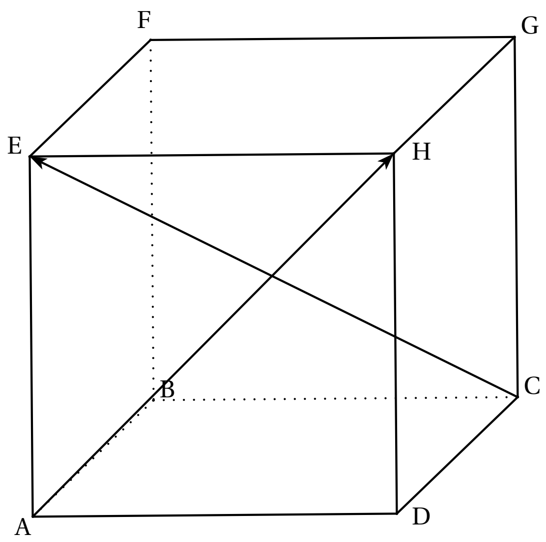
$$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CD}\iff\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}=0$$

De plus [AH] et [DE] sont les diagonales d'un carré donc

$$(AH)\perp(DE)\iff\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DE}$$

Au final :

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{DE}=0+0=0\iff\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CE}$$



III) Applications du produit scalaire dans l'espace

III-1 Equation cartésienne d'un plan

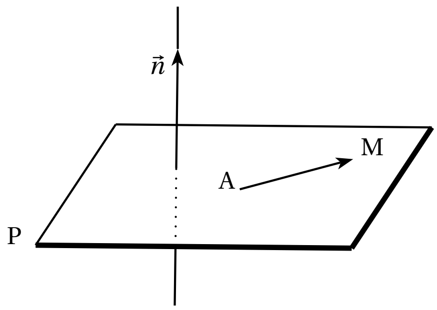
Définition 2 :

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à P.

Soit A un point d'un plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal à P.
On a, pour tout point M du plan P,

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, alors $M \in P$ On a donc le résultat suivant :



Propriété 2 : *Caractérisation d'un plan* P

Le plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Exercice 3 :

Dans un repère orthonormal $(O; veci, \vec{j}, \vec{k})$ on donne $A(1;2;3)$ et $\vec{n}(1;-3;1)$. Trouver une équation du plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{n}$.

Solutions :

Soit $M(x;y;z) \in P$ on a alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff (x-1) - 3(y-2) + (z-3) = 0 \iff x - 3y + z + 2 = 0$$

P a donc pour équation

$$x - 3y + z + 2 = 0$$

Théorème 3 :

Dans un repère orthonormal $(O; veci, \vec{j}, \vec{k})$, tout plan P admet une équation (dite cartésienne) de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

avec a, b, c réels non tous nuls et d réel.
De plus le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à P

Preuve

Notons $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de P et $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal à P, alors on a :

$$M(x;y;z) \in P \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

En posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ on obtient le résultat désiré

Remarques :

- Notons que l'équation d'un plan n'est pas unique. En effet si $\mathrm{P} : x+y+z=1$ alors P a aussi pour équation $2x+2y+2z=2$.
- Quelques cas particuliers :
  Le plan $(\mathrm{O}xy)$ a pour équation $z=0$, en effet $\mathrm{O}(0;0;0) \in (\mathrm{O}xy)$ et $\vec{k}(0;0;1)$ est normal à ce plan, ainsi :
  $$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \vec{k} = 0 \iff z=0$$
  De la même manière les plans $(\mathrm{O}xz)$ et $(\mathrm{O}yz)$ ont respectivement pour équation $y=0$ et $x=0$.
  Enfin le plan P passant par les points $\mathrm{A}(a;0;0)$, $\mathrm{B}(0;b;0)$ et $\mathrm{C}(0;0;c)$ a pour équation :
  $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
  En effet cette équation est bien l'équation cartésienne d'un plan, de plus les coordonnées des points A, B et C (qui ne sont pas alignés) vérifient bien cette équation, ce qui implique qu'il ne peut s'agir que du plan (ABC).

Exercice 4 :

On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$$\mathrm{P} : x-4y+7=0$$

$$\mathrm{Q} : x+2y-z+1=0$$

1. Montrer que ces plans sont sécants. On note d leur droite d'intersection.
2. Déterminer un vecteur directeur de d.

Solutions :

1. Les plans P et Q sont soit sécants soit parallèles.
   Le vecteur $\vec{n}(1;-4;0)$ est normal à P et le vecteur $\vec{n'}(1;2;-1)$ est normal à Q.
   On a $\mathrm{P}//\mathrm{Q} \iff \vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont deux vecteurs colinéaires. Existe-t-il un réel k tel que :
   $$\vec{n} = k\vec{n'}$$
   Si c'était le cas on aurait $k=1$ et $2k=-4$, ce qui est absurde, ainsi les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les plans P et Q ne sont pas parallèles, P et Q sont donc sécants selon une droite d.
2. Si $\mathrm{M}(x;y;z) \in d$, alors $\mathrm{M} \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$, par conséquent les coordonnées de M vérifient le système suivant :
   $$\begin{cases} x-4y+7=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$$
   Posons $y=t$, il vient :
   $$\begin{cases} x=4t-7 \\ y=t \\ z=4t-7+2t+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=4t-7 \\ y=t \\ z=6t-6 \end{cases}$$
   On a pu exprimer les coordonnées d'un tel point M en fonction d'un paramètre t, on dit qu'il s'agit d'une équation paramétrique de la droite d.
   Pour $t=0$, alors $\mathrm{A}(-7;0;-6)$ est un point de la droite d. Considérons le vecteur $\vec{u}(4;1;6)$
   Le système ci-dessus se réécrit :
   $$\begin{cases} x+7=4t \\ y-0=t \\ z-(-6)=6t \end{cases} \iff \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u}$$
   Ainsi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, par conséquent $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d.

Théorème 4 :
Deux plans P et Q sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Deux plans P et Q sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Corollaire 1 :
Soit deux plans P et Q d'équations

$$\mathrm{P} : ax+by+cz+d=0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

1. $\mathrm{P}//\mathrm{Q} \Longleftrightarrow (a,b,c)$ et (a',b',c') sont proportionnels.
2. $\mathrm{P}\perp\mathrm{Q} \Longleftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$.

Preuve

1. $\mathrm{P}//\mathrm{Q} \Longleftrightarrow \vec{n}(a;b;c)=k\vec{n'}(a';b';c')$
2. $\mathrm{P}\perp\mathrm{Q} \Longleftrightarrow \vec{n}\perp\vec{n'} \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'}=0 \Longleftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$

Exercice 5 :

Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan $(x\mathrm{O}y)$?

Solutions :

Le plan $(x\mathrm{O}y)$ a pour équation $z=0$ et le plan P cherché a une équation du type :

$$ax+by+cz+d$$

D'après le corollaire précédent on sait que (a,b,c) et $(0,0,1)$ sont proportionnels, donc $a=0$ et $b=0$, par conséquent le plan P a une équation du type (avec $c\neq 0$) :

$$cz+d=0 \Longleftrightarrow z=-\frac{d}{c}$$

Exercice 6 :

Quelle est l'équation générale d'un plan perpendiculaire au plan $(x\mathrm{O}y)$?

Solutions :

Soit P un tel plan avec $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal, il a donc une équation de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

Mais $(x\mathrm{O}y)$ a pour équation $z=0$ et donc pour vecteur normal $\vec{n'}(0;0;1)$, donc d'après le corollaire on a :

$$\vec{n}\cdot\vec{n'}=0 \Longleftrightarrow 0a+0b+c=0 \Longleftrightarrow c=0$$

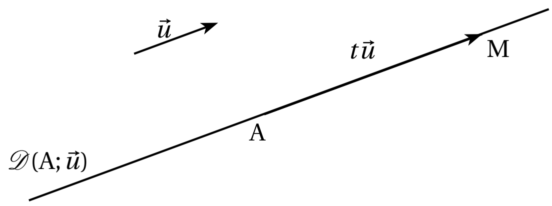
D'où le plan P a une équation de la forme :

$$ax+by+d=0$$

III-2 Représentation paramétrique d'une droite

Caractérisation d'une droite

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace, l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ où $t \in \mathbb{R}$ est une droite, notée $\mathscr{D}(A;\vec{u})$, passant par A et dirigée par $\vec{u}$ (i.e que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d).



Considérons la droite $\mathscr{D}$ passant par un point $A(x_0;y_0;z_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ On a la série d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned}
& M(x;y;z) \in \mathscr{D} \\
\iff & \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R} \\
\iff & \begin{cases} x - x_0 = \alpha t \\ y - y_0 = \beta t \\ z - z_0 = \gamma t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R} \\
\iff & \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Définition 3 :

Ce dernier système s'appelle représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}(A;\vec{u})$

Exercice 7 :

Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(-1;2;-3)$ et $B(1;-1;1)$.

Solutions :

Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ est par exemple le vecteur $\overrightarrow{AB}(2;-3;4)$, ce qui donne par conséquent :

$$\begin{aligned}
& M(x;y;z) \in \mathscr{D} \\
\iff & \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R} \\
\iff & \begin{cases} x + 1 = 2t \\ y - 2 = -3t \\ z + 3 = 4t \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R} \\
\iff & \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = 4t - 3 \end{cases} \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

III-3 Systèmes et Intersection dans l'espace

III-3.1 Intersection d'une droite et d'un plan

Considérons un plan P d'équation

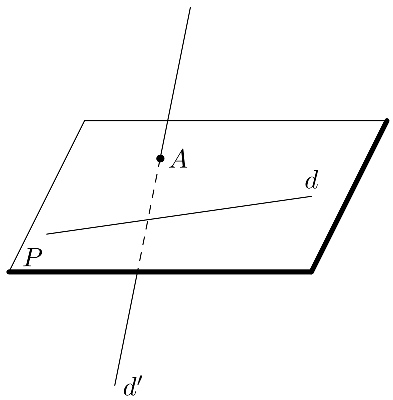
$$ax + by + cz + d = 0$$

et une droite d dont on connaît une représentation paramétrique :

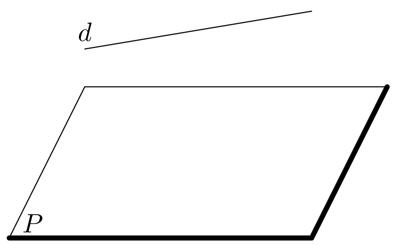
$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Il n'existe que trois possibilités :

1. la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants,



2. la droite est incluse dans le plan,
3. la droite et le plan n'ont aucun point commun.



C'est le premier cas qui nous intéresse, pour cela supposons que le vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ au plan P et le vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ ne sont pas orthogonaux (comme dans les cas deux et trois), ainsi P et d sont sécants en un point A.
On cherche alors les coordonnées de A en résolvant l'équation suivante (d'inconnue t) :

$$a(\alpha t + x_0) + b(\beta t + y_0) + c(\gamma t + z_0) = 0$$

i.e (en factorisant par t) :

$$t(a\alpha + b\beta + c\gamma) = -x_0 - y_0 - z_0$$

Comme on a supposé $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$, on peut diviser par $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$ et on obtient :

$$t = \frac{-x_0 - y_0 - z_0}{a\alpha + b\beta + c\gamma}$$

Finalement, en remplaçant dans le système de représentation paramétrique de d, on trouve les coordonnées de A. Mais obsevons sur un exemple....

Exercice 8 :

Soit $\mathrm{P} : 2x - z = 0$ et $d : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -3t \\ z = 2 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées du point $\mathrm{A} = \mathrm{P} \cap d$.

Solutions :

Soit $\vec{n}(2;0;-1)$ un vecteur normal de P et $\vec{u}(1;-3;0)$ un vecteur directeur de d, assurons nous que le point A existe :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \neq 0$$

Par conséquent A existe nous pouvons déterminer ces coordonnées, en résolvant l'équation suivante :

$$2(t-1) - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2t - 2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow t = 2$$

Ainsi, en remplaçant dans le système paramétrique de d on obtient $\mathrm{A}(2-1;-3 : times2;2)$ i.e $\mathrm{A}(1;-6;2)$.

III-3.2 Intersection de deux droites

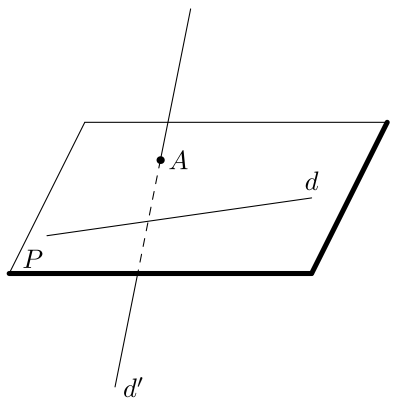
On donne deux droites d et d' dont on connaît les représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

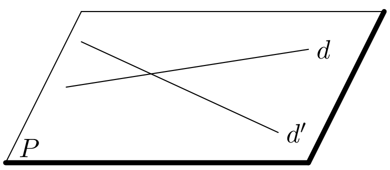
$$d' : \begin{cases} x = \alpha' t' + x_1 \\ y = \beta' t' + y_1 \\ z = \gamma' t' + z_1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

d et d' sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

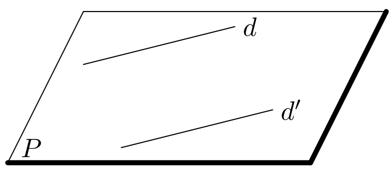
1. il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,



2. il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).



deux droites sécantes



deux droites parallèles

On résout alors le système (qui peut ne pas avoir de solutions) (d'inconnues t et t') :

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha t + x_0 = \alpha' t' + x_1 \\ \beta t + y_0 = \beta' t' + y_1 \\ \gamma t + z_0 = \gamma' t' + z_1 \end{array}\right.$$

Exercice 9 :

On donne $A(1;-1;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;-2;0)$ et $D(2;-3;3)$.
Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Solutions :

$\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ est un vecteur directeur de (AB) par conséquent la droite (AB) admet la représentation paramétrique suivante :

$$(AB) : \left\{\begin{array}{l} x = -t+1 \\ y = -1 \\ z = t \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\overrightarrow{CD}(-1;-1:3)$ est un vecteur directeur de (CD) par conséquent la droite (CD) admet la représentation paramétrique suivante :

$$(CD) : \left\{\begin{array}{l} x = -t'+3 \\ y = -t'-2 \\ z = 3t' \end{array}\right. \qquad t' \in \mathbb{R}$$

On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{l} -t+1 = -t'+3 \\ -1 = -t'-2 \\ t = 3t' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -t = -t'+2 = 1+2 = 3 \Rightarrow t = -3 \\ t' = -1 \\ t = 3t' = -3 \end{array}\right.$$

La troisième équation est compatible avec les deux premières, nous pouvons donc affirmer :

1. le système admet une solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont coplanaires.
2. Le système admet une unique solution qui est le couple $(t;t') = (-3;-1)$ donc les droites sont sécantes en un point A, dont on obtient les coordonnées en remplaçant t ou t' dans l'une des représentations paramétriques de d ou d' :

$$A(4;-1;-3)$$

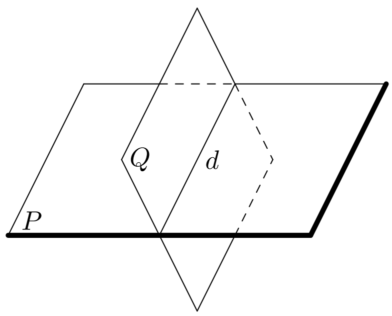
III-3.3 Intersection de deux plans

On considère deux plans sécants P et Q d'équations cartésiennes respectives :

$$\mathrm{P} : ax+by+cz+d=0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Q} : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

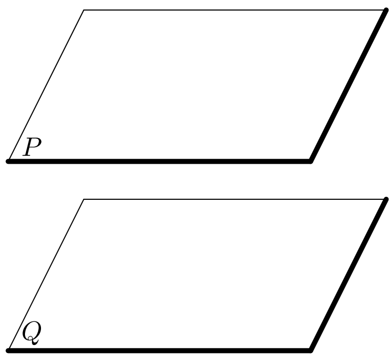
P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

1. les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)



2. les plans sont confondus,

3. ils n'ont aucun point commun.



Lorsque les deux plans sont sécants, on peut alors récupérer le système de représentation paramétrique de la droite d'intersection en utilisant une des trois coordonnées comme paramètre et en résolvant le système.

Exercice 10 :

Donner une représentation paramétrique de la droite d définie, intersection des plans P et Q d'équations respectives :

$$\mathrm{P} : 2x+y-z-2=0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} : x+3y+7z-11=0$$

Solutions :

On peut (même si l'énoncé de l'exercice suggère que la droite d existe) s'assurer que P et Q sont sécants.

$\overrightarrow{n}(2;1;-1)$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{n'}(1;3;7)$ est un vecteur normal de Q, P et Q sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, si c'était le cas, alors on aurait $\vec{n} = k\vec{n'}$, dans ce cas on aurait :

$$2 = k \qquad \text{et} 1 = 3 = k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

ce qui absude, donc P et Q sont deux plans sécants.

Comme $2x + y - z - 2 = 0 \Longrightarrow y = 2x + z + 2$, ainsi :

$$x + 3(2x + z + 2) + 7z - 11 = 0 \Longleftrightarrow 7x + 10z - 5 = 0 \Longleftrightarrow z = -0,7x + 0,5$$

Et du coup :

$$y = 2x - 0,7x + 0,5 + 2 = 0,3x + 2$$

En posant $x = t$, on obtient :

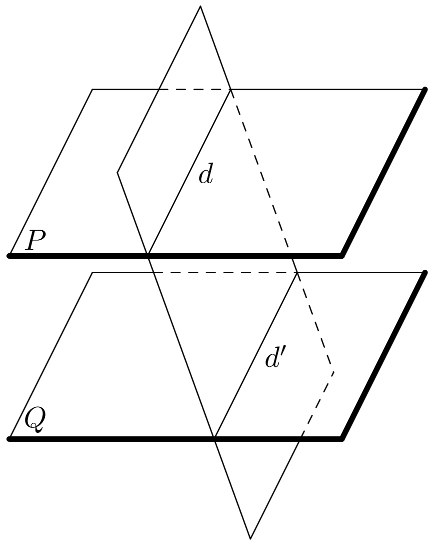
$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 0,3t + 2 \\ z = -0,7t + 0,5 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

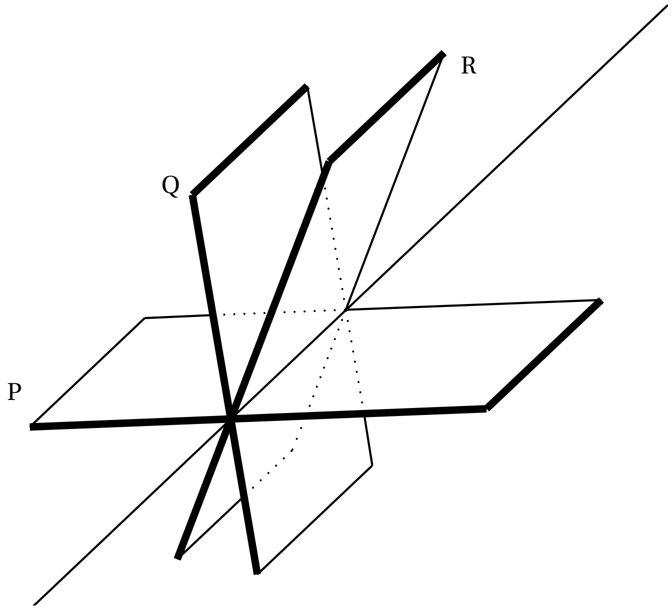
III-3.4 Intersection de trois plans

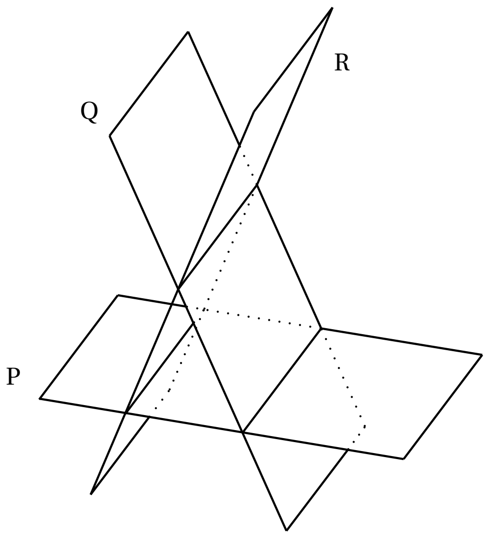
On considère trois plans P, Q et R dont on connaît une équation cartésienne :

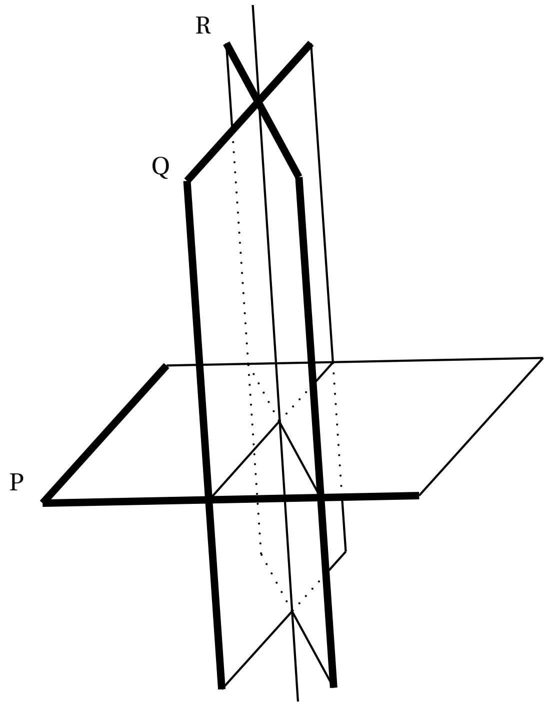
$$\mathrm{P}: ax+by+cz+d=0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Q}: a'x+b'y+c'z+d'=0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R}: a''x+b''y+c''z+d''=0$$

P, Q et R sont trois plans de l'espace, il existe diverses situations, en voici quelques-unes :









Exercice 11 :

Déterminer l'intersection des plans P, Q et R avec :

$$\mathrm{P}: 2x+3y-2z-2=0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Q}: 4x-3y+z-4=0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R}: 2x+12y-7z-2=0$$

Solutions :

Si $\mathrm{M}(x;y;z)$ appartient à l'intersection des trois plans alors x, y et z vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+3y-2z=2 \\ 4x-3y+z=4 \\ 2x+12y-7z=2 \end{cases}$$

De la deuxième équation on tire : $z=4-4x+3y$ et en reportant dans les équations 1 et 3 on obtient :

$$\begin{cases} 2x+3y-2(4-4x+3y)=2 \\ 2x+12y-7(4-4x+3y)=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 10x-3y-10=0 \\ 30x-9y-30=0 \end{cases}$$

On constate alors qu'il suffit de multiplier la première par 3 pour obtenir la deuxième, donc ces deux équations se résument à une seule :

$$x=\frac{3}{10}y+1$$

Posons alors $y=10t$ (avec t réel), d'où :

$$x=3t+1 \qquad \text{et} \qquad z=18t$$

Ainsi, les solutions du système sont les triplets x, y, z tels que :

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=10t \\ z=18t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

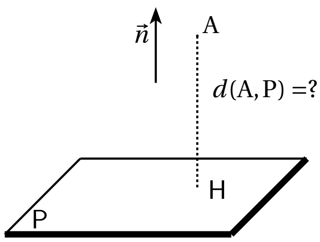
Il s'agit de la représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}(\mathrm{A};\vec{u})$ avec $\mathrm{A}(1;0;0)$ et $\vec{u}(3;10;18)$.

III-4 Distance d'un point à un plan

Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A};z_\mathrm{A})$ un point et P un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$. Comment calculer la distance entre le point A et le plan P ?

Notons $\mathrm{H}(x_\mathrm{H};y_\mathrm{H};z_\mathrm{H})$ le projeté orthogonal de A sur P.
Nous savons que le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à P.
Donc les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ sont colinéaires.
Il existe un réel t tel que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{n}$$



Par conséquent

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}=\pm\mathrm{AH}\times\|\vec{n}\|$$

Mais encore, (notons que $\mathrm{H}\in\mathrm{P}\Longrightarrow ax_\mathrm{H}+by_\mathrm{H}+cz_\mathrm{H}+d=0$)

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}=a(x_\mathrm{H}-x_\mathrm{A})+b(y_\mathrm{H})-y_\mathrm{A})+c(z_\mathrm{H}-z_\mathrm{A})=-(ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d)$$

Au final :

$$\mathrm{AH}\times\|\vec{n}\|=\left|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d\right|\Longleftrightarrow\mathrm{AH}=\frac{\left|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d\right|}{\|\vec{n}\|}=\frac{\left|ax_\mathrm{A}+by_\mathrm{A}+cz_\mathrm{A}+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Remarque : Retenir l'idée de cette démonstration qui est de calculer $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\vec{n}$ de deux manières différentes.

Exercice 1. Calculer la distance du point A au plan P.

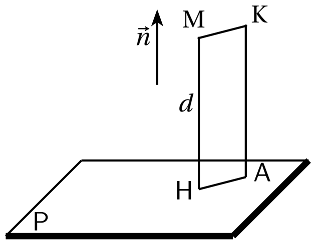
1. $A(1;-1;1)$ et P est le plan d'équation $2x+y-z-3=0$.
2. $A(2;1;0)$ et P est le plan passant par l'origine du repère, de vecteur normal $\vec{n}(1;-1;-1)$.

III-5 Distance d'un point à une droite, dans l'espace

On se donne ici une droite d passant par un point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{d}(a;b;c)$.
On se donne un autre point $M(x_M;y_M;z_M)$ et on cherche à calculer la distance entre le point M et la droite d. L'idée est d'exploiter le plan P, orthogonal à d et passant par A. Notons H et K les projetés respectifs de M sur d et P. Comme MHAK est un rectangle, on a d'après le théorème de Pythagore :

$$MK^2 = MA^2 - MH^2$$

La distance MA se calcule facilement car M et A sont donnés.
La distance MH se calcule avec la formule ci-dessus (distance entre le point M et la plan P).



III-6 Équation d'une sphère

Théorème 5 :
Toute sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon r admet une équation de la forme :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

Preuve

$M(x;y;z)\in\mathscr{S} \iff \Omega M^2=r^2 \iff (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

Théorème 6 :
La sphère $\mathscr{S}$ de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

Preuve

On utilise, par exemple, une formule de la médiane : Soit Ω le milieu de [AB] (et donc le centre de la sphère), alors :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}\right)=\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M\Omega}-\overrightarrow{\Omega A}\right)=M\Omega^2-\Omega A^2=M\Omega^2-r^2$$

On en déduit :

$$M\in\mathscr{S}\iff M\Omega^2=r^2\iff M\Omega^2-r^2=0\iff\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$$

Exercice 2. Déterminer l'équation de la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre [AB] avec $A(0;0;1)$ et $B(1;2;3)$. Préciser son centre Ω et son rayon r.

Solutions :

D'après le théorème précédent on a :

$$\mathrm{M}(x;y;z) \in \mathscr{S} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 \Longleftrightarrow -x(1-x) - y(2-y) + (1-z)(3-z) = 0$$

On obtient alors :

$$x^2 - x + y^2 - 2y + z^2 - 4z + 3 = 0$$

Pour retrouver son centre et son rayon, on canonise :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y-1)^2 - 1 + (z-2)^2 - 4 + 3 = 0 \Longleftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$\mathscr{S}$ est donc la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};1;1\right)$ et pour rayon $r = \frac{3}{2}$

Remarque : On pouvait simplement trouver ce résultat en calculant les coordonnées du milieu de $[\mathrm{AB}]$ pour obtenir le centre et en calculant la moitié du diamètre AB pour obtenir le rayon