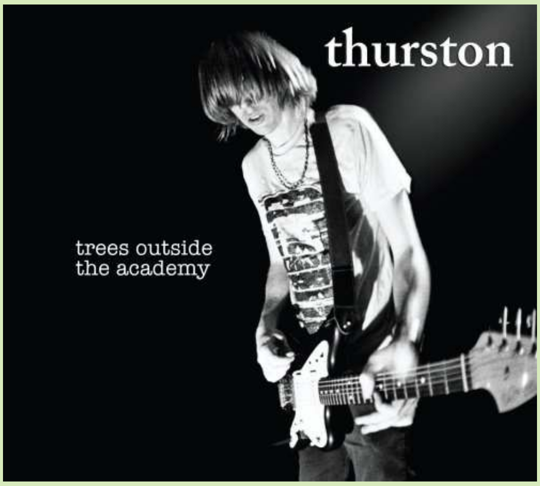
Chapitre 12

Lois continues

Hors Sujet



Titre : « Tree Outside The Academy »
Auteur : Thurston Moore
Présentation succinte de l'auteur : Thurston Moore est un musicien américain né le 25 juillet 1958 dans l'État de Floride. Membre du groupe de rock Sonic Youth au sein duquel il chante et joue de la guitare.

Les artistes avec qui Thurston Moore travailla tout au long de sa carrière sont nombreux et assez éclectiques pour constituer un réseau aussi puissant que rare dans l'histoire de la musique actuelle.

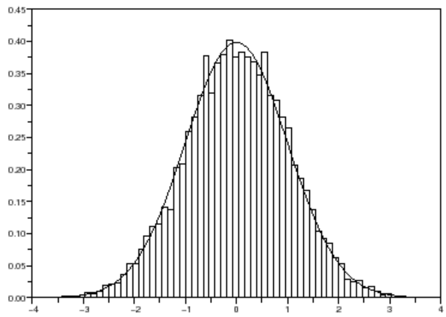
Avec Lee Ranaldo, il est connu pour l'usage de nombreuses sortes d'accordages de guitare. C'est également un adepte de la guitare préparée. En effet, il joue de la guitare avec des baguettes de batterie, avec un marteau, avec une lime de fer, avec un klaxon de vélo ou encore avec une petite barre de fer. Thurston Moore étonne et surprends par la qualité des enregistrements des disques de Sonic Youth ou de ce disque solo, artiste sur lequel le temps semble n'avoir aucune emprise. La candeur ardente et entousiasmante de Moore souffle un vent de jeunesse d'une fraicheur absolue. Moore y va à l'économie question saturations, mais elles reviennent parfois au pas de charge, rappelant avec stridence mais sans insister les racines brutistes de tout le "Rock" engendré par Moore et ses collègues de Sonic Youth depuis vingt ans. Jouissif.

Document réalisé à l'aide de LaTeX
Auteur : D. Zancanaro
Site : wicky-math.fr.nf
Lycée : Jean Durand (Castelnaudary)

Table des matières

« *Télécharger c'est tuer l'industrie, tuons les tous* »
THURSTON MOORE (SONIC YOUTH)

LEÇON 12



Lois continues

Introduction

Vous connaissez déjà des nombres réels particuliers : les entiers, les rationnels, les irrationnels. D'autres catégories (pouvant recouper les ensembles habituels) sont utilisées. Ainsi, les nombres racines de polynômes à coefficients entiers sont appelés *nombres algébriques* : c'est le cas de 1 (solution de $x-1=0$), de $1/3$ (solution de $3x-1=0$), de $\sqrt{2}$ (solution de $x^2-2=0$), etc. On connaît des nombres qui ne sont pas algébriques, on les appelle les *nombres transcendants*. C'est le cas par exemple de π et de e. Au premier abord, il semble qu'il y ait beaucoup plus de nombres algébriques que de nombres transcendants (vous n'en connaissez que deux !). Un jour de pur délire, on pourrait même envisager qu'il y ait autant de nombres de chaque catégorie. Or, si on prend un nombre au hasard dans l'intervalle $[0,1]$, vous calculerez peut-être un jour que la probabilité d'obtenir un nombre transcendant vaut ....1 ! ! ! ! En effet, la « mesure »de l'ensemble des nombres algébriques est nulle. Pourtant, demandez à un ordinateur de vous donner un milliard de nombres au hasard entre 0 et 1, l'écran ne vous affichera que des nombres algébriques (décimaux même !). L'ensemble $\mathbb{R}$ recèle bien d'autres résultats étonnants.

I) Densité de probabilité et loi de probabilité

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux variables aléatoires X qui prennent leurs valeurs dans un intervalle i.e à des univers définis par des intervalles.

Exemple :

On choisit au hasard un nombre (réel) aléatoire entre 0 et 1. L'univers de cette expérience est alors $\Omega=[0;1]$. Considérons la variable aléatoire X qui prend la valeur 1 si on choisit un nombre transcendant et 0 sinon. Imaginons le jeu suivant si $X=1$ alors le joueur gagne une ferrari et sinon il paye un billet d'entrée 10€. Comment savoir si ce jeu est rentable ?
On l'a vu dans l'introduction ce jeu est rentable, puisque on peut démontrer que $P(X=1)=1$, malheureusement cette hypothétique expérience n'est pour l'instant que le fruit de notre imagination. Aucun être humain ne peut choisir au hasard un nombre entre 0 et 1, et de la même manière aucun ordinateur ne peut réaliser ce prodige...
On vient d'imaginer une expérience impossible à réaliser, cependant on peut la modéliser mathématiquement, et les modèles qu'on va développer dans ce chapitre trouveront des champs d'application dans notre monde.

I-1 Densité de probabilité

Définition 1 :

Soit I un intervalle.
On appelle densité de probabilité sur I toute fonction f continue et positive sur I telle que :

$$\int_I f(x)\,dx = 1$$

Remarque :

– Le nombre $\int_I f(x)\,dx$ est défini par : $\int_a^b f(x)\,dx$ si $I=[a;b]$.

– Si I est un intervalle non borné, par exemple $[a, +\infty[$, alors la quantité notée $\int_I f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

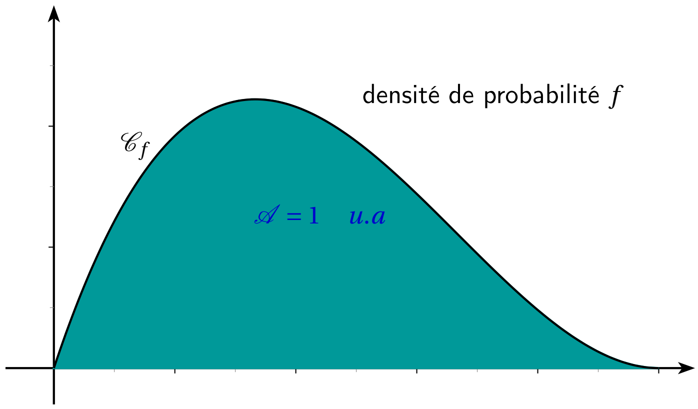
$$\int_I f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$$

De la même manière si $I =]-\infty; a]$ alors la quantité notée $\int_I f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la limite suivante :

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)dt$$

– Enfin si $I = \mathbb{R}$ alors la quantité notée $\int_I f(t)dt$ désigne, lorsqu'elle existe, la somme des limites suivante :

$$\int_I f(t)dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)dt + \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$$



Exercice 1 :

1. Déterminer le nombre réel α tel que la fonction f définit par $f(x) = x + \alpha$ soit une densité de probabilité sur $[0; 1]$.
2. Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$). Quelle doit être la valeur de la constante γ pour qu'elle soit une densité sur $[a; b]$?
3. Soit λ un réel strictement positif. Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.

Solutions :

1. On doit avoir $\int_0^1 x + \alpha dx = 1 \Longleftrightarrow \left[\frac{x^2}{2} + \alpha x\right]_0^1 = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha = 1 \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$
2. On doit avoir $\int_a^b \gamma dx = 1 \Longleftrightarrow [\gamma x]_a^b = 1 \Longleftrightarrow \gamma(b-a) = 1 \Longleftrightarrow \gamma = \frac{1}{b-a}$
3. Calculons dans un premier temps : $\int_0^x f(t)dt$.

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}$$

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-\lambda x} = 1$$

Ainsi on vient de montrer que :

$$\int_I f(t)dt = 1$$

ce qui implique que f est une densité de probabilité.

I-2 Loi de probabilité

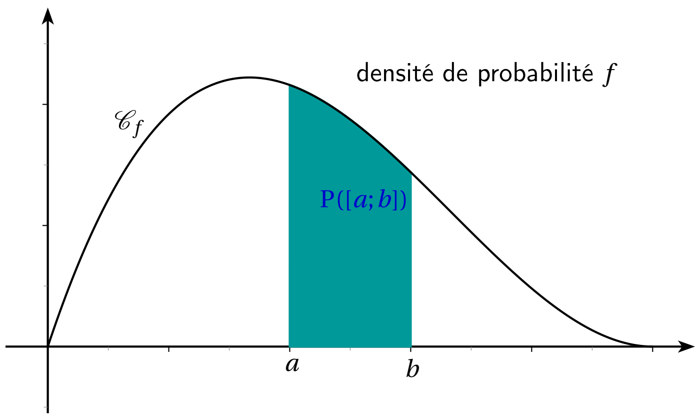
Définition 2 :

Soit I un intervalle et f une densité de probabilité sur I. L'application P qui, à tout sous-intervalle $[a,b]$ de I associe la quantité :

$$P([a;b]) = \int_a^b f(t)dt$$

est appelée loi de probabilité sur I.

Illustration :



Remarques :

– $P([a;b])$ n'est rien d'autre que l'aire du domaine représenté ci-dessus. Notons que, puisque f est une densité de probabilité sur I, on a : $P(I) = 1$ et $0 \leq P([a;b]) \leq 1$. Quand on modélisera une expérience aléatoire I représentera l'univers de notre expérience.

– Un résultat étonnant : pour tout réel x_0 de I on a :

$$P(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(t)dt = 0$$

i.e que l'éventualité x_0 est un résultat **possible** de l'expérience de probabilité **nulle**, c'est ici une différence fondamentale avec le cas discret. Prenons un exemple, si on choisit un nombre au hasard entre 0 et 1, la probabilité que l'on choisisse par exemple $\frac{1}{3}$ est nulle même si l'événement peut avoir lieu. On dit alors que $\{x_0\}$ est un événement « quasi-impossible ».

Toujours dans cette même expérience la probabilité de choisir un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$ semble naturellement égale à $\frac{1}{2}$ i.e

$$P([0;0.5]) = \int_0^{0.5} f(t)dt = \frac{1}{2} \qquad \text{où } f \text{ reste à déterminer.}$$

Nous allons dans le paragraphe suivant déterminer qu'elle est la densité de probabilité la plus à même de modéliser une telle expérience.

– Grâce aux propriétés de l'intégrale, on retrouve les trois règles de définitions d'une probabilité :

1. $P \in [0;1]$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ avec $A \cap B = \emptyset$

II) Variable aléatoire continues

Sont dites continues les variables aléatoires qui prennent leurs valeurs dans un intervalle I.

Définition 3 :

Soit une loi de probabilité P sur I un intervalle de densité f.
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans I suit la loi de probabilité P si :

$$\mathrm{P}(a \leq \mathrm{X} \leq b) = \int_a^b f(t)dt \qquad \forall a, b \in \mathrm{I}$$

Exercice 2 :

1. Montrer que f est la densité d'une loi de probabilité P avec :
$$\mathrm{I} = [0;1] \qquad \text{et} f(x) = 2x$$
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I qui suit la loi de probabilité P, déterminer $\mathrm{P}\left(\frac{1}{4} \leq \mathrm{X} \leq \frac{3}{4}\right)$
3. Le résultat précédent permet-il d'envisager que P modélise le choix d'un nombre au hasard entre $[0;1]$?
4. Déterminer $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \leq \mathrm{X} \leq \frac{3}{4}\right)$.
5. Que penser du résultat précédent ?

Solutions :

1. On a :
$$\int_0^1 2x dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1 - 0 = 1$$
ce qui montre que f est la densité d'une loi de probabilité P.
2. On a :
$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{4} \leq \mathrm{X} \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 2x dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$
3. oui.
4. $$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2} \leq \mathrm{X} \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x dx = \left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16} - \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$
5. Cette loi de probabilité ne modélise pas l'expérience consistant à choisir un nombre au hasard entre 0 et 1, en effet le résultat attendu à la question précédente est $\frac{1}{4}$.

III) Exemples de lois continues

III-1 La loi uniforme

Définition 4 :
On appelle **loi uniforme** sur $I = [a;b]$, la loi de probabilité P dont la densité f est une fonction constante sur I (et donc comme on l'a vu dans un exemple $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$).

Remarques :

- Soit $J = [\alpha;\beta]$ un sous intervalle de I on a alors :

$$P(J) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dt = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

- Dans le cas où $I = [0;1]$, la probabilité du sous-intervalle de I $[\alpha;\beta]$ est donc égale à :

$$P(J) = \frac{\beta-\alpha}{1-0} = \beta-\alpha$$

  Il s'agit de la loi de probabilité que nous choisissons pour modéliser le choix aléatoire d'un nombre entre 0 et 1. On obtient dans ce cas,

$$P([0;0.5]) = 0,5-0 = \frac{1}{2} \qquad \text{c'est bien le résultat attendu}$$

  ou encore :

$$P\left(\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]\right) = \frac{3}{4}-\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad \text{c'est naturel !!}$$

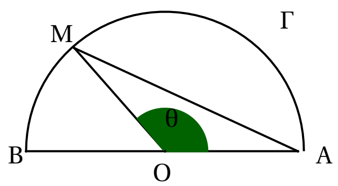
- La loi uniforme généralise au continu ce que la loi équirépartie [1] est au discret. Elle modélise par conséquent de nombreuses situations, en particulier elle intervient « dans le choix d'un point au hasard sur un segment (ou d'un nombre au hasard dans un intervalle I) ».

Exercice 3 :
Dans la journée, un métro passe toutes les 6 minutes à la station n°14.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0;6]$.
Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 3 et 5 minutes ?

Solutions :
On a :

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 \frac{1}{6}dt = \frac{5-3}{6} = \frac{1}{3}$$

Application :
Un point M est pris au hasard sur le demi-cercle Γ de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1.
Quelle est la probabilité p qe le triangle AOM soit d'aire inférieure ou égale à $0,25$?



Note : On admet que « choisir un point M au hasard sur le demi-cercle Γ »revient à dire que « l'angle $\theta = \widehat{AOM}$

1. celle pour laquelle chaque éventualité à la même probabilité

suit la loi uniforme sur $[0;\pi]$ ».

Calculons dans un premier temps l'aire $\mathscr{A}$ du triangle AOM, en notant H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle AOM on a :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{OA} \times \text{HM}}{2} = \frac{\text{HM}}{2}$$

Déterminons HM, en raisonnant dans le triangle rectangle HOM. Exploitons le sinus de l'angle $\widehat{\text{HOM}}$ qui vaut suivant la position de M soit θ soit $\pi - \theta$. On a $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, par conséquent :

$$\sin\theta = \frac{\text{HM}}{\text{OM}} = \text{HM}$$

Au final

$$\mathscr{A} = \frac{\sin\theta}{2}$$

Ainsi

$$0 \leq \mathscr{A} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\sin\theta}{2} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 0 \leq \sin\theta \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi$$

De plus

$$\text{P}\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\pi} dt = \frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{6}$$

et

$$\text{P}\left(\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi\right) = \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} \frac{1}{\pi} dt = \frac{\pi - \frac{5\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{6}$$

Au final, comme les événements $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right)$ et $\left(\frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi\right)$ sont disjoints on obtient :

$$\text{P}(\mathscr{A} \leq 0,25) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

III-2 La loi exponentielle

Définition 5 :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
On appelle **loi exponentielle de paramètre** λ sur $\mathbb{R}^+$, la loi de probabilité P dont la densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Remarques :

– On a déjà montré que f est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^+$.

– Une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque la probabilité la probabilité de l'événement $(0 \leq \text{T} \leq t)$ noté simplement $(\text{T} \leq t)$ est $\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} ds$.

On a vu alors que

$$\text{P}(\text{T} \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

et donc par conséquent

$$\text{P}(\text{T} > t) = e^{-\lambda t}$$

Exercice 4 :

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

1. Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie.
2. On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans.
   Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?
3. Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

Solutions :

1. On a

$$P(X > 10) = 1 - P(0 \le X \le 10) = 1 - \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^{10} = 1 + \left[e^{-\lambda s}\right]_0^{10} = 1 + e^{-10\lambda} - 1 = e^{-10\lambda}$$

2. On doit calculer

$$P_{X>10}(X > 12) = \frac{P((X > 10) \cap (X > 12))}{P(X > 10)} = \frac{P(X > 12)}{P(X > 10)} = \frac{e^{-12\lambda}}{e^{-10\lambda}} = e^{-2\lambda}$$

3. On a

$$P(X > 2) = 1 - P(0 \le X \le 2) = 1 - \int_0^{2} \lambda e^{-\lambda s} ds = 1 - \left[-e^{-\lambda s}\right]_0^{2} = 1 + \left[e^{-\lambda s}\right]_0^{é} = 1 + e^{-2\lambda} - 1 = e^{-2\lambda} = P_{X>10}(X > 12)$$

   On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge. On dit que X est une loi de durée de vie *sans vieillissement*.

Application :

Le nombre d'atomes en activité d'une substance radioactive est lié au temps t par la relation

$$N' = -\lambda N$$

où λ est une constante dépendant de la substance.

Partie A :

1. (a) Calculer N en fonction de t, de λ et du nombre initial d'atomes N_0.
   (b) Vérifier qu'à un instant t, la proportion d'atomes désintégrés est égale à $1 - e^{-\lambda t}$.
2. On admet que la proportion d'atomes désintégrés par rapport à la quantité initiale, calculée ci-dessus, représente, pour un atome donnée de la substance, la probabilité d'avoir été désintégré avant l'instant t.
   Soit X la variable aléatoire égale à l'instant où un atome donné se désintègre.
   Justifier que X suit un loi exponentielle, préciser son paramètre.

Partie B : **Période d'un élément radioactif (ou demi-vie) :**
Temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'un échantillon donné se soit désintégrée.

1. Soit T la demi-vie d'un élément. On admet que pour un atome donné de la substance étudiée, cela signifie que $P(X < T) = 0,5$. Que représente T pour la variable X ?
2. Le phosphore 32 a une demi-vie T égale à 14,2 jours.
   (a) Calculer le paramètre de la loi X pour le phosphore 32.
   (b) Calculer la probabilité qu'un atome de phosphore 32 se désintègre :
      – durant la première semaine.
      – après 30 jours.
   (c) A partir de quelle durée de vie peut-on considérer que la probabilité pour un atome de phosphore 32 d'être désintégré est supérieure à 0,95.
3. (a) Dans le cas de l'uranium 238, le paramètre de la loi exponentielle est estimé à $1,54 \times 10^{-10}$. Calculer la demi-vie de cet élément.
   (b) L'âge de la Terre a pu être évalué à quelques 4,5 milliards d'années.
   Quelle est aujourd'hui la probabilité qu'un atome d'uranium 238 soit encore actif.

IV) Loi de durée de vie sans vieillissement [Aux limites du programme]

Définition 6 :

Soit X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie d'un individu ou d'un objet. On dit que X suit la loi de durée de vie sans vieillissement lorsque la probabilité que l'individu (ou l'objet) soit vivant (ou fonctionne) à l'instant $t+h$ sachant qu'il est vivant (ou qu'il fonctionne) à l'instant t ne dépend pas de son âge t i.e

$$P_{X>t}(X>t+h)=P(X>h)$$

Remarque : la loi de durée de vie sans vieillissement s'applique-t-elle aux humains ? Non, ce n'est pas un modèle pertinent à long terme. En effet, un bébé à la naissance peut raisonnablement espérer vivre plusieurs dizaines d'années alors qu'on ne peut en dire autant d'un vieillard. Le modèle semble plus proche de la réalité lorsque h est petit (dans ce cas). Par exemple la probabilité de vivre encore une minute semble comparable indépendamment de l'âge. Mais cette loi s'applique plutôt à des composants électroniques par exemple.

IV-1 Une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle suit une loi de durée sans vieillissement

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ sur $\mathbb{R}^+$ alors on a vu que :

$$P(X>t)=e^{-\lambda t}$$

Soit h un réel strictement positif on a :

$$P_{X>t}(X>t+h)=\frac{P\left((X>t)\cap(X>t+h)\right)}{P(X>t)}=\frac{P(X>t+h)}{P(X>t)}=\frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda h}=P(X>h)$$

Ainsi X suit bien une loi de durée sans vieillissement.
Examinons désormais la réciproque.

IV-2 Une variable aléatoire qui suit une loi de durée sans vieillissement suit une loi exponentielle

Réciproquement, soit X une variable aléatoire suivant une loi de durée de vie sans vieillissement. Alors pour tout réel t de $\mathbb{R}^+$ et tout réel h de $\mathbb{R}^+$:

$$P_{X>t}(X>t+h)=P(X>h)\iff\frac{P(X>t+h)}{P(X>t)=P(X>h)}\iff P(X>t+h)=P(X>t)P(X>h)$$

Notons ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\phi(t)=1-P(X\leq t)=P(X>t)$$

Montrons que :
- $\phi(0)=1$
- ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Pour cela notons F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F(t)=P(X\leq t)=\displaystyle\int_0^t f(x)dx$.
F est la primitive de la densité f qui s'annule en 0 i.e $F'=f$ et $F(0)=0$, or :

$$\phi(t)=1-F(t)$$

Par conséquent ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\phi(0)=1-0=1$.
On sait que $\phi(t+h)=\phi(t)\phi(h)$, que ϕ est dérivable et vérifie $\phi(0)=1$.
On en déduit (leçon sur les équations différentielles du type $y'=ky$ et la fonction exponentielle) qu'il existe un réel a tel que pour tout réel t de $\mathbb{R}^+$:

$$\phi(t)=e^{at}$$

Mais comme ϕ est en fait une probabilité, on a pour tout t de $\mathbb{R}^+$:

$$\phi(t) \leq 1 \iff e^{at} \leq 1 \iff at \leq \ln 1 = 0 \iff a \leq 0$$

Ainsi posons $\lambda = -a > 0$ on obtient :

$$\phi(t) = e^{-\lambda t} \iff 1 - \mathrm{F}(t) = e^{-\lambda t}$$

En dérivant membre à membre :

$$-f(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \iff f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

La variable aléatoire X suit donc une loi exponentielle de paramètre λ.

Nous avons démontré le résultat suivant :

Théorème 1 :
Une variable aléatoire X suit la loi de durée de vie sans vieillissement si seulement si elle suit une loi exponentielle.